面 向 21 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

广义函数与数学物理方程

（第二版）

齐民友　吴方同　编



内 容 简 介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部理科数学力学“九五”规划教材．是普通高等教育“九五”国家级重点教材．本书把广义函数、数学物理方程合并写成一本书，这是一种新的尝试．前四章介绍广义函数，写得浅显，力求具体一些，更接近物理一些，而不涉及拓扑线性空间．后四章在此基础上，以基本解为线索处理经典的数学物理方程内容，并简要介绍了偏微分方程比较近代的一些内容．本书第一版于1989年出版．这一次作者依据几年来的教学实践对原书作了不少增删、修改，并增加了一些例题和较多的习题．

本书可作为高等学校数学专业的教科书，也可供其他理科专业选用或供有关科研人员参考．

目　录

第二版说明 ………… 1
序言 ………… 3
第一章　数学物理方程的来源 ………… 1
1. 引言 ………… 1
2. 弦振动方程 ………… 1
3. 热传导方程 ………… 3
4. 拉普拉斯方程和泊松方程 ………… 4
5. 定解条件 ………… 5
6. 定解问题的适定性 ………… 7
习题 ………… 8
第二章　广义函数 ………… 9
§1. **历史的概述** ………… 9
习题 ………… 14
§2. **基本空间** ………… 15
1. 基本定义和例子 ………… 15
2. 函数的磨光化 ………… 16
3. 单位分解 ………… 19
4. 博雷尔定理 ………… 20
习题 ………… 22
§3. **广义函数及其基本运算** ………… 23
1. 基本定义 ………… 23
2. 微分运算与乘子运算 ………… 25
3. 线性变换 ………… 29
4. 极限运算 ………… 30
习题 ………… 34
§4. **一些常用的广义函数** ………… 36
1. 广义函数 x_+^λ 与 x_-^λ ………… 36

2. 柯西积分主部 …… 37
3. 广义函数 $\frac{1}{x+i0}$ 和 $\frac{1}{x-i0}$ …… 40
习题 …… 41
§5. **紧支集广义函数** …… 41
1. 基本定义 …… 41
2. 广义函数的局部构造 …… 43
习题 …… 45
第三章 卷积 …… 46
§1. **函数与广义函数的卷积** …… 46
1. 函数与广义函数的卷积 …… 46
2. 广义函数的正则化 …… 48
习题 …… 49
§2. **广义函数的卷积** …… 50
1. 两个广义函数卷积的定义 …… 50
2. 广义函数卷积的性质. 卷积代数 …… 51
3. 例 …… 54
习题 …… 55
§3. **物理学中的卷积** …… 56
第四章 傅里叶变换 …… 59
§1. **急减函数空间 $\mathscr{S}$ 与缓增广义函数 $\mathscr{S}'$** …… 59
1. 广义函数与傅里叶变换 …… 59
2. 急减函数空间 $\mathscr{S}$ 及其上的傅里叶变换 …… 60
3. 缓增广义函数及其傅里叶变换 …… 65
习题 …… 70
§2. **勒贝格空间的傅里叶变换** …… 71
1. L^1 函数的傅里叶变换 …… 71
2. L^2 函数的傅里叶变换 …… 74
习题 …… 76
第五章 偏微分方程一般理论 …… 77
§1. **柯西—柯瓦列夫斯卡娅定理** …… 77
1. 定理的简化 …… 77
2. 定理的证明 …… 79
§2. **局部可解性** …… 81
习题 …… 82

§3. 常系数偏微分方程的基本解 …… 83
§4. 勒维反例 …… 85
习题 …… 87
§5. 二阶线性偏微分方程的分类 …… 87
习题 …… 89
第六章　椭圆型方程 …… 90
§1. 调和函数的性质 …… 90
1. 拉普拉斯方程的基本解 …… 90
2. 格林公式 …… 91
3. 平均值公式与极值原理 …… 93
习题 …… 95
§2. 简单区域中的狄利克雷问题 …… 97
1. 边值问题概述 …… 97
2. 半平面的格林函数 …… 100
3. 圆的格林函数 …… 102
4. 调和函数的另一些性质 …… 104
习题 …… 106
§3. 关于一般椭圆型偏微分方程解的正则性分析 …… 108
§4. 一般区域内拉普拉斯方程边值问题简介 …… 110
1. 应用积分方程方法 …… 110
2. 变分方法 …… 112
第七章　抛物型方程 …… 115
§1. 柯西问题 …… 115
1. 热传导方程的基本解 …… 115
2. 柯西问题的解 …… 116
习题 …… 118
§2. 初边值问题 …… 119
1. 极值原理 …… 119
2. 傅里叶方法 …… 121
3. 比较一般的情况 …… 124
4. 例 …… 126
5. 非齐次问题 …… 131
习题 …… 132
第八章　双曲型方程 …… 134
§1. 柯西问题 …… 134

1. 波动方程的基本解 …… 134
2. 柯西问题的解 …… 136
3. 降维法 …… 138
4. 波的传播. 惠更斯(Huygens)原理 …… 139
习题 …… 142
§2. 混合问题. 能量积分法 …… 143
1. 弦振动方程的混合问题 …… 143
2. 柯西问题解的唯一性和稳定性 …… 145
3. 混合问题的唯一性与稳定性 …… 148
习题 …… 150
§3. 特征的概念 …… 152
1. 弱间断与特征 …… 152
2. 广义柯西问题 …… 154
3. 化为标准形 …… 155
习题 …… 157
参考文献 …… 159
名词索引 …… 160

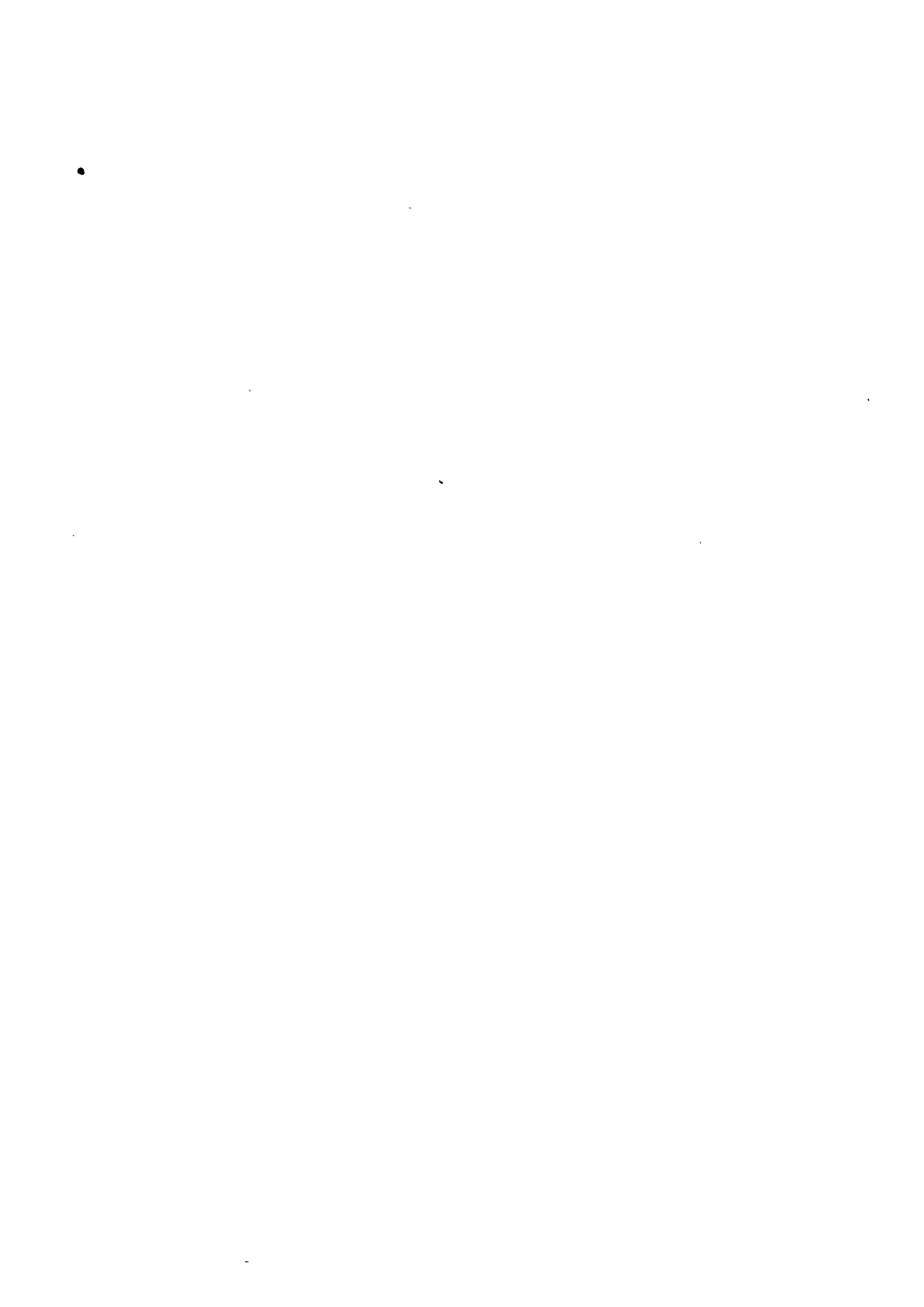
第二版说明

本书的第二版主要是吴方同教授努力的结果. 在作者们多次共同讨论以后，这次再版主要是依据几年来在数学人材培养基地班进行的教学实践，对原书内容作了不少删节和改写，也改正了不少错误. 例如卷积的处理就是基本重新写了的，避免了张量积的概念. 1997 年 10 月在广西南宁召开的数学与力学教学指导委员会基础数学教学指导组工作会议上，又有一些同志提了许多宝贵的建议，根据这些建议我们对经典的三个类型方程的一般理论作了不少补充，增补了第五章. 把原先属于其他章节的一般理论的内容移了到第五章，并增加了柯西—柯瓦列夫斯卡娅定理及其证明，不过证明是用小字写的. 对书中小字写的部分，读者可根据情况适当跳过而不影响后面的学习. 此外，还增加了一些例题和较多的习题，有些难题还作了适当的提示.

另外，本书的第二版作为"九五国家级重点教材"得到了教育部（原国家教委）的资助，还得到武汉大学教务处的大力支持.

齐民友

1998 年 10 月



序 言

从 1980 年开始，根据中法两国政府协议在武汉大学数学系举办了一个中法两国教师任教的试验班. 1985 年作者为这个班四年级开设了偏微分方程课，其内容即本书第五至七章，约 30 课时讲完. 这就是本书的直接缘起.

但是这样写书的想法却是酝酿了很久了. 多年来，我们开设的数学物理方程课都是按照大体相同的模式，主要讲授一些经典的方法. 这样，学生学了以后，离当代的数学水平还有很大的距离. 如果想在比较新的基础上讲这门课，又担心其他课程跟不上，也担心学生接受不了. 武汉大学的这班学生在学习本课程前系统地学过广义函数论而且并不感到困难. 这个经验促使作者作这样一个尝试：把广义函数论与数学物理方程合并起来写成一本书.

其实广义函数论并不是很难接受的东西. 初学广义函数并不一定需要它的理论基础——拓扑线性空间理论，正如初学数学分析的人不一定要学实数理论一样. 相反，广义函数论有许多有趣的实例，有明确的物理背景而且比较灵活. 与其说是难学不如说是人们对它比较生疏. 掌握了它，就可以以基本解作为基本的线索讨论偏微分方程的一些基本问题：可解性、解的奇异性与正则性(亚椭圆性)等等. 这样，比之过去，就离这个分支的前沿近得多了. 至于一些不可少的经典的内容也都可以得到适当的安排. 同时，作者的另一个想法是，广义函数不只是现代数学家不可少的工具，对于物理学家也是十分有用的(实际上，物理学家老早就在以他们自己的方式应用广义函数了). 因此，作者力求把各种材料写得具体一些，更接近物理一些. 当然回过头来看，仍感到还应该多一些具体的例子. 特别是最近读到 R. P. Kanwal, Generalized Functions(Acad. Press，1983)一书更感到还可以写得更浅些、更具体些. 用广义函数作为基本工具还有一个意图：现在我国大学数学系学生在分析方面有许多缺陷，其中最大的一个是对傅里叶(Fourier)变换知道太少. 如果讲广义函数就可以最自然地弥补这一不足. 这种讲法比之常见的用勒贝格(Lebesgue)积分来讲要更自然更易懂. 同时讲广义函数就可以介绍一些现代分析中最常见的内容如单位分解、磨光技巧和卷积等等. 所以本书前四章是数学分析课程的一个继续.

当然这就发生了本书与其他课程如何衔接的问题. 依据武汉大学中法班的经验，本书是一个学期的教材，大约 60 学时即可讲完. 当然第一次试用还可以省略不少内容. 作者设想，本书可以用于三年级上学期与复变函数同时

进行，所以其中有好几处用到柯西(Cauchy)定理、留数计算，估计学生不应有困难. 学广义函数也可以暂时不用勒贝格积分. 这样，例如局部可积函数只好理解为局部黎曼(Riemann)可积. 但是它只是作为广义函数之一例而出现，则理解为黎曼可积是没有害处的. 实际上，如果不涉及完备性问题，用黎曼积分大体上也就够了. 但是对经典的傅里叶变换理论，勒贝格积分是不可少的. 因此本书这一部分是用小字写的. 如果这门课在三下开设而与实变函数同时进行，这些困难就没有了. 书中还有个别的地方需要用到一些未证的定理，例如广义函数的局部表示要用 Hahn-Banach 定理(也可以不用)，本书就只叙述而未证明. 有些地方要暂时跳过去，这全靠任课教师适当处理了. 总之，一个三年级学生想要自学本书内容应该没有大的困难.

另一个问题是应该注意防止学生片面追求抽象化的倾向. 从武汉大学的经验来看，时常有一些学生十分喜欢某种完美简洁的数学框架，广义函数也是其中之一，而对物理问题兴趣不大，对复杂的计算更是望而却步. 为此，本书比较注意广义函数理论的物理背景. 但这还是不够的，教师有责任引导学生关心具体的物理问题，要从“天上”回到“地上”，因为当代数学发展的潮流正是数学与物理的紧密结合. 还要让学生肯“算”、会“算”，不要走到头来只会抽象的道理而连一些最简单的实例也算不出来. 为此，希望十分注意习题. 如果有的学生感到习题有困难，建议教师再补充一些数学物理的经典方法的习题.

试图用比较现代的方法讲授偏微分方程的书已经不少了. 作者写这本书时用得最多的是：Hörmander 在 Lund 大学讲授广义函数的讲义. 后来这本讲义扩大补充成为他的巨著：The Analysis of Linear Partial Differetial Operators，Vol. 1，Springer-Verlag，1983. 另一本书是 G. B. Folland，Lectures on Partial Differential Equations，Springer-Verlag，1983. 写作时见到姜礼尚、陈亚浙二同志写的《数学物理方程》(高教出版社，1986)，他们试图以现代的数学理论处理经典的材料使作者得到不少启发. 作者还要感谢李大潜同志的谈话，他建议写这本书不必求全，不必顾到各方面的需要，而要注意自己的特色(如果谈得上什么特色的话). 这使作者比较放胆地写，其目的也就是作为一种尝试以图抛砖引玉而已.

第一章　数学物理方程的来源

1. **引言**　偏微分方程已经有了很长的历史. 大约在微积分出现后不久，就开始了关于偏微分方程的研究. 在很长的时间里，人们注意力的中心或者是物理问题的、或者是几何学中的具体的个别的偏微分方程. 这是十分自然的. 因为许多物理的基本规律的数学形式都是偏微分方程. 例如流体力学、弹性力学、电磁学的基本定律都是如此. 这些来自物理的偏微分方程就是常说的数学物理方程. 下面我们将要介绍三个方程——弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯(Laplace)方程，不仅因为它们很简单，尤其因为它们代表了三类不同的典型方程. 理解了它们的性质就在研究一般的偏微分方程时有所遵循. 推导它们的方法大体上也是相同的，而且适用于其他的经典的数学物理方程. 这里说“经典”是因为一些量子力学中的偏微分方程(特别是薛定谔(Schrödinger)方程)的建立依据的是完全不同的方法. 它不在我们讨论之列.

大量研究素材的积累自然迫使人们去建立比较一般的理论. 可是比之其他数学分支，在偏微分方程方面，进展道路更加迂回. 这在本质上是由于偏微分方程内容极为丰富，而且它的本性也与例如常微分方程大相异趣. 它需要新的数学理论. 1950 年左右出现的广义函数理论(分布理论)提供了我们所需要的武器. 这以后，人们可以用比较具有普遍性的方法去研究它了. 在这本书里，我们将要介绍广义函数论的初步知识，并且利用它来讨论经典的数学物理方程. 应该提一下：广义函数不仅对于数学物理方程是必不可少的，而且对于许多数学分支也是必不可少的. 它也为越来越多的物理学家和工程师所接受. 广义函数论是现代数学的组成部分.

2. **弦振动方程**　推导弦振动方程，即为弦振动现象建立数学模型，首先需要了解它所服从的基本物理规律，同时应该作一些简化假设. 弦是一个力学系统，是一个质点组(但是连续的而非离散的质点组，所以也说，它是一个一维的连续统)，所以它的运动应符合牛顿运动定律. 对它的简化假设如下：设弦在未受扰动时平衡位置是 x 轴，而其上各点均以该点之横坐标表示. 弦上各点的位移均发生在某个 (x,u) 平面内垂直于 x 轴的方向上. 因此在时刻 t 弦的形状是曲线 $u=u(x,t)$. 我们现在进一步作以下的简化假设：

1) 弦的扰动是小扰动. 这并不是说 $u(x,t)$ 的数值很小而是设 u_x 很小：

$|u_x| \ll 1$，从而 $|u_x|^2$ 可以略去不计.

2）弦是“柔软”的. 弦是一个连续体，其所以能维持其形状是由于其各个部分互相之间有力作用，这种力称为内力. 如果要使弦的形状改变就必须抵抗其内力而作功. 所谓“柔软”，是对其内力的性质的一种规定，即规定内力必须为切线方向的张力，所以如果想把它扭弯，即在法向发生形变，并无内力抵抗，这样就称它为柔软的. 如图 1－1，弦在 P 以左和 P' 以右的部分各以切向张力 T 与 T' 作用于$\overparen{PP'}$，作用点各为 P 与 P'，方向分别指向 P 的左方和 P' 的右方，即由 $\overparen{PP'}$ 之外的部分作用于 $\overparen{PP'}$.

由假设 1）可以推导出 $T=T'$. 推导过程这里从略，有兴趣的读者可以参看吉洪诺夫与萨马尔斯基著：《数学物理方程》（黄克欧译，高等教育出版社 1956 年出版），其中有大量关于物理知识的讨论，是很有用的一本书.

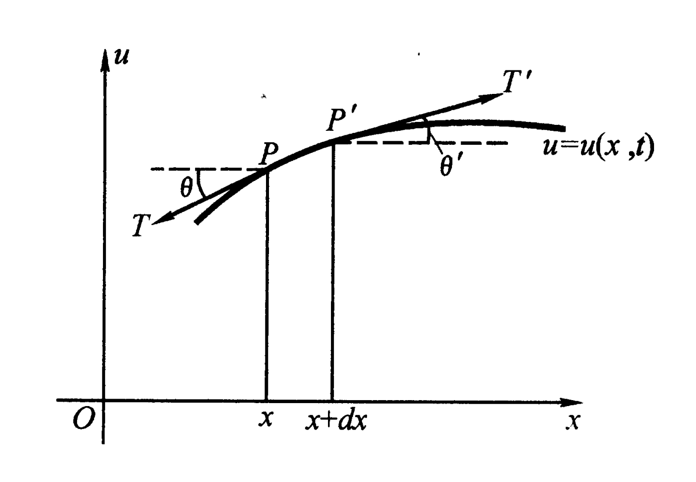


图　1—1

在建立数学模型时，这种简化假设是必须的. 作什么样的假设，需由所要解决的问题的性质以及所需的精确度而定. 过多的假设常使所得的结论不反映客观情况而失去价值，过少的假设则会使所得的模型过分复杂. 总之，这是一个实验与实践的问题而不是理论问题.

建立模型的下一步是分析弦上一小段——图 1—1 的 $\overparen{PP'}$，其中 P' 和 P 的横坐标差为 dx，这是一个“微元”. 它必须足够小，使得我们可以无视其内部各点的差别而认为其各点的状况都是均匀的，凡比 dx 更高阶的量均可略去，它又必须足够大，使得可以忽略微观效应，可以认为描述其运动的函数都相当规则. 这个规定是具有普遍意义的，大凡在讨论连续体的问题时，总是这样作的.

上面说的微元，时常说是一种“物理无穷小”.

现在把 $\overparen{PP'}$ 作为一个运动的质点来考虑. 设弦是均匀的，其密度 ρ 是一个常数，因 $\overparen{PP'}$ 长为 dx（我们用弦长 $\overline{PP'}$ 代替弧长 $\overparen{PP'}$ 因为其差别与 $(dx)^2$ 同阶而被略去），故质量为 ρdx，加速度为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. 弦的其余部分作用于它的力

是 P 与 P' 两点指向外的张力 T 与 T'. 在 x 方向，其分力为

$$
\begin{aligned}
T'\cos\theta' - T\cos\theta &= T\left[\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta'}} - \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right] \\
&= T\left[\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(P')}} - \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(P)}}\right] \\
&= 0. \qquad (u_x^2 \text{ 可以略去，而且 } T' = T.)
\end{aligned}
$$

u 方向的分力为

$$
\begin{aligned}
T'\sin\theta' - T\sin\theta &= T(\tan\theta' - \tan\theta) \\
&= T[u_x(P') - u_x(P)] \\
&= T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.
\end{aligned}
$$

因此由牛顿第二定律有

$$
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx,
$$

或

$$
\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2 = T/\rho. \tag{1}
$$

(1)称为弦振动方程.

3. **热传导方程** 现在研究均匀物体中热的传导，因此认为物体的密度 ρ、比热 c 与热传导系数 k 均是常数. 若记该物体中一点的坐标为 (x,y,z)，时刻 t 该点的温度为 $T(x,y,z,t)$. 取物体内包含点 P 的小长方体为上面说到的微元. 我们讨论这个微元内的热平衡.

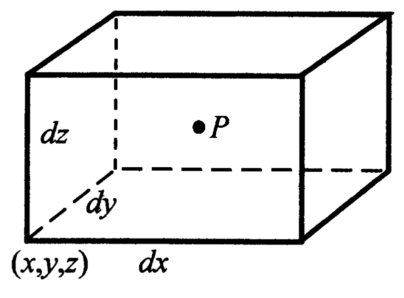


图 1—2

在时刻 t 到 $t+dt$ 内，该微元内各点(以 P 代表各点)的温度变化是

$$
T(P,t+dt) - T(P,t) = \frac{\partial T}{\partial t}dt.
$$

使温度升高 $\frac{\partial T}{\partial t}dt$ 所需的热量(热能之量)是

$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dtdxdydz$ (该微元的质量为 $\rho dxdydz$).

此处消耗的热量应该由物体内部的热源(例如物体内部发生化学变化时就会有这种热源)与微元外向微元内的热传导来补充. 现在先考虑传导现象. 热传导服从一个实验定律——傅里叶定律：通过面积 dS 在 dt 时间内沿法方向 $\boldsymbol{n}$ 方向传导的热量是 $-k\frac{\partial T}{\partial n}dSdt$. 这里出现负号是因为热量由高温处流

向低温处. 故当 $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$ 时，热量实际上是向 $-\boldsymbol{n}$ 方向流去. 由此，在 dt 时间内通过微元左右两侧(面积 dS 均为 $dydz$)流入(在左侧是沿 x 方向流入，在右侧是沿 $-x$ 方向流入)微元的热量是

$$kdt(T_x(x+dx,y,z,t) - T_x(x,y,z,t))dydz$$
$$= k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dxdydzdt .$$

沿前后两侧和上下两侧流入的热量可以同样计算. 最后，由热的平衡可得

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dxdydzdt = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dxdydzdt ,$$

或者

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad a^2 = k/c\rho. \tag{2}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是一个极重要的算子，称为拉普拉斯算子，记作 Δ.

(2)称为热传导方程.

如果在物体内还有一个热源，则需要一个函数来标志其强度. 记这函数为 $f(x,y,z,t)$，它表示在 dt 时间内，在该微元中产生的热量是 $f(x,y,z,t)dxdydzdt$. f 应该是由实验给出的，或者由其他物理规律导出. 总之，在我们这里认为是已知的. 这时，我们将得到以下的非齐次方程

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{1}{k}f(x,y,z,t). \tag{3}$$

这一点留作习题.

在以上过程中，基本的物理定律是热的平衡——能量守恒. 我们可以认为傅里叶实验定律是一种简化假设，因为它只是在一定情况下适用的近似的经验定律. 当它不适用时，得到的数学模型可以大不相同. 参数 c、k 与 T 无关也是重要的简化假设. 当然 c、k、ρ 的均匀性也是一种简化，但这并不重要，抛弃这一假设并不导致比(2)复杂得多的方程.

4. **拉普拉斯方程和泊松方程**

现在考虑静电场中的电位 $\varphi(x,y,z)$，并设场中有电荷分布，其密度为 $\rho(x,y,z)$. 如果电场强度为 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$，则由定义，$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$. 高斯定律告诉我们，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \rho .$$

这里的高斯定律采取这样简单的形式是因为我们采用了特定的单位制. 将 $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ 代入此式就得到 ρ 所适合的方程

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\Delta\varphi = \rho . \tag{4}$$

它称为泊松(Poisson)方程. 特别是在自由电场(即 $\rho = 0$ 的情况)中，电位适

合拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi = 0\,. \tag{5}$$

这里我们是从一些物理定律推导出方程的. 如果我们分析一下这些定律导出的过程，仍可看到采用了微元的分析和对一些实验事实的概括. 例如库伦(Coulumb)定律就是一个实验定律，而高斯定律是依据于它的. 凡实验定律都包含了对实际情况的某种简化或理想化，或作了某些省略. 因此只是某种近似. 本例在这一点上和前两个例子一样有简化假设.

拉普拉斯方程不仅出现在静电场问题中. 例如设热传导方程(2)的解 T 与时间无关时——这种温度场称为定常温度场——则方程(2)成为

$$\Delta T = 0\,.$$

所以，拉普拉斯方程也可以描写定常温度场. 不但如此，它还可以描写引力场势等等. 概括地说，它所描写的自然现象是稳定的、定常的，亦即与时间无关的. 拉普拉斯方程可以描述种种不同的现象，其他方程也如此：热传导方程还可以描述扩散现象，弦振动方程可以描述传输线中的电流或电压(当参数适合一定的条件时)，还可以描述轴的扭转振动等等. 这种情况正是数学物理方程作为描述自然现象的工具的力量所在. 实际上，这三个方程各是一类方程的典型. 各反映一类自然规律. 尤其是，这三类方程的数学性质各取决于一个二次型的性质. 在本书中，我们将依据这个二次型将方程分类，并逐类进行讨论.

5. **定解条件** 上面的例子告诉我们，这些数学物理方程都是一般的物理定律的表现，它反映很广泛的事物. 因此，为了刻画一个具体的对象，例如一定形状，一定材料的物体在某特定情况下的温度，就需要一定的补充条件——不只是几何形状、材料性质. 这些补充条件称为定解条件. 在数学物理方程理论中，我们总是联系着一定的定解条件来研究一个方程的. 这就叫做一个定解问题.

常见的定解问题有两大类. 一类是，对于描述随时间演变的方程，如(1)和(2)(这类方程统称为发展方程)，需要给出在初始时刻的状态. 例如对于(2)，就应该指定初始时刻(设为 $t=0$)的温度：

$$T|_{t=0} = f(x,y,z)\,, \qquad (f\text{ 已知.}) \tag{6}$$

对于(1)，则因为它是一个力学运动，需要的是初始位移和初始速度

$$u|_{t=0} = f_0, \quad u_t|_{t=0} = f_1, \qquad (f_0,\ f_1\text{ 已知.}) \tag{7}$$

(6)和(7)称为初始条件.

如果我们研究一个有界区域中的物理现象，例如 Ω 内的温度分布或静电场，或者一段弦 $[0,l]$ 的振动，则区域边界 $\partial\Omega$ (在弦的状况下是两个端点：$x=0,\ l$)上的状况将是十分重要的，因为它反映物体与周围介质的相互作用.

现以方程(2)为例来说明.

如果控制 $\partial\Omega$ 上的温度为一已知值，则有

$$T|_{\partial\Omega} = f(x,y,z)\ ,\quad (x,y,z)\in\partial\Omega,\quad (f\text{ 已知.}) \tag{8}$$

这种条件称为狄利克雷(Dirichlet)条件，也称第一边值条件.

更复杂的情况是由傅里叶实验定律来反映的，在 $\partial\Omega$ 的小块面积 dS 上，在 dt 时间内流出 Ω 的热量与小块面积 dS 以及 Ω 与周围介质在 $\partial\Omega$ 上的温差成正比. 设介质温度 $F(x,y,z)$，$(x,y,z)\in\partial\Omega$，为已知，则所述的热量为 $K(T-F)dSdt$，$K>0$ 为比例常数(称为外传导系数)，. 但是，这个热量必须由 Ω 内部沿外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 流到 $\partial\Omega$ 上. 后者由前述的傅里叶实验定律，应该是 $-k\dfrac{\partial T}{\partial n}dSdt$ (与 K 相对，k 也可称为内传导系数). 由热的平衡可得以下形状的条件

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}+\lambda T\right)\bigg|_{\partial\Omega}=f,\qquad \lambda>0. \tag{9}$$

f 为已知，这种条件称为劳本(Robin)条件或第三边值条件，特别是，$K=0$ 时可得

$$\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=0\ , \tag{10}$$

这是绝热条件，一般地，称 $\dfrac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=f$ 为诺依曼(Neumann)条件或第二边值条件.

如果我们研究有界弦 $[0,l]$ 的振动，则在其端点也应给出条件. 例如要求

$$u(0,t)=f_0(t)\ ,\qquad u(l,t)=f_1(t)\ , \tag{11}$$

f_0，f_1为已知的. 当然也可以有复杂的条件，不过其物理意义不甚明显，在此略去.

(8)—(11) 称为边值条件，当研究 Ω 中的热传导时，应该给出(8)—(10)中之一. 如果研究 Ω 中的静电场，当然也应给出一个边值条件例如给出(8)—(10) 中之一，不过这时其物理含义不同了. 如果研究无界区域中的问题当然就不再需要边值条件. 不过有时需对解在无穷远处的渐近状况加以限制. 这实际上也是边值条件.

概括起来，对于有界区域的发展方程，既要初始条件又要边值条件. 这种定解问题称为初边值问题.

对于全空间的发展方程，应给出初始条件. 这种定解问题称为初值问题或柯西(Cauchy) 问题.

对于方程(5) 应只给出边值条件. 只有边值条件的定解问题称为边值问

题.

6. 定解问题的适定性 什么样的定解问题是合理的？即是说，可以很好地反映物理规律性？这里有三个必须要考虑的问题.

1）解的存在性.

2）解的唯一性.

这里的关键问题是如何理解“解”的意义. 例如方程(1)—(5)都是二阶方程，一个自然的理解是：凡满足方程的 C^2 函数称为解(以下 $C^k(\Omega)$ 表示在 Ω 上直到 k 阶导数皆连续的函数之空间，Ω 是一个开集，所以 $C^k(\Omega)$ 中的函数在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上不一定有导数，甚至不一定有意义. 有时略去 Ω 而直书为 C^k). 这种解称为古典解. 然而，现代的偏微分方程理论却不以古典解为最好的选择. 因此，这两个问题更准确的说法是：讨论解在某个集合——函数空间——中的存在与唯一性. 函数空间的选择也就是一个适当的框架的选择，现代的偏微分方程理论可以说是始于找到了一个合适的框架——广义函数. 这本书的中心思想就是在这个框架中讨论一些经典的数学物理方程.

3）解的稳定性. 定解问题中的一些已知量——数据，如(6)—(10)中的 f，都是由实验测得的，因而不可避免地会有误差，如果数据的微小误差会导致解的巨大误差，这叫做失去稳定性. 这时，很难用它来描述自然现象.

下面是阿达马(Hadamard)关于不稳定性的著名的例子.

在上半平面 $y>0$ 处讨论拉普拉斯方程的柯西问题：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ , \tag{12}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\qquad u_y(x,0)=\psi(x)\ . \tag{13}$$

令其解为 u_1，如果对初始数据加以微小摄动，例如将(13)换为

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\qquad u_y(x,0)=\psi(x)+\frac{1}{n^k}\sin nx, \tag{13$'$}$$

(k 是正整数)令其解为 u_2，则若记 $U=u_1-u_2$，应有

$$\Delta U=0\ ,\qquad U(x,0)=0\ ,\qquad U_y(x,0)=\frac{1}{n^k}\sin nx\ .$$

很容易验证

$$U(x,y)=\frac{1}{n^{k+1}}\operatorname{sh} ny\sin nx$$

是它的解，但只要 n 充分大，则在任意狭的带形 $0<y\leqslant y_0$ 中均可使 $\sup U(x,y)$ 任意大，所以上述问题的解是不稳定的. 当然稳定性问题也应该放在一定的函数空间中来考虑.

以上三种性质称为解的适定性，其解具有以上三种性质的定解问题称为

适定问题. 本书将讨论一些经典的适定问题.

习 题

1. 设弦的密度 $\rho = \rho(x)$ 不是常数，推导出弦振动方程.

2. 若在物体 Ω 内有强度为 $f(x,y,z,t)$ 的热源，推导出热传导方程.

3. 若弦在一介质中振动，介质对它具有与速度成正比的阻力，弦上各点又有与位置成正比的恢复力，求出这时的弦振动方程.

4. 若一个物体的材料具有以下性质：比热与热传导系数均为温度 T 的函数，T 应满足什么样的方程?

5. 若一个微分算子 $L(u)$ 具有以下性质(称为叠加原理)：

$$L(cu) = cL(u), \qquad c\text{ 为常数；}$$

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)\ ;$$

则 L 称为线性偏微分算子. 证明本章中方程(1)，(2)，(5)中的微分算子都是线性的.

6. 验证在极坐标 (r,θ) 之下拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 具有如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\ ,$$

进而求出其径向对称解(即只依赖于 r 而与 θ 无关的解).

7. 验证在球坐标 (r,θ,φ) 之下拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 具有如下形式：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\ ,$$

进而求出其径向对称解(即只依赖于 r 而与 θ, φ 无关的解).

8. 对于拉普拉斯方程的狄利克雷外问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\ , & x^2 + y^2 + z^2 > 1\ , \\ u(x,y,z) = 0\ , & x^2 + y^2 + z^2 = 1\ , \end{cases}$$

若不加限制条件 $\lim\limits_{|(x,y,z)|\to\infty} u(x,y,z) = 0$，它便有无穷多个解. 请写出其无穷多个解.

9. 将一根长为 l，两端固定的弦从中点提起，使中点离开平衡位置的距离为 h，然后把弦轻轻放下，使弦作自由振动. 试写出该振动所满足的定解问题. 已知弦的线密度为 ρ，张力为 T.

第二章　广义函数

§1. 历史的概述

牛顿和莱布尼茨(Leibniz)建立微积分是科学史上一件划时代的事. 人们应用它来描述自然现象(当时主要是物理、力学现象)得到了辉煌的成就. 这使得人们有这样一种信念：一个函数必然是或者应该是充分光滑的，至少是除了某些奇点外光滑,使我们可以对它任意微分或积分，从而得以多少顺利地刻画自然现象，得到种种结论. 宇宙是和谐的，描述它的函数也不应该是病态的. 但是后来的发展证明,微积分，作为一种工具，基础并不那么牢固. 从 19 世纪起，数学家在微积分的基础上作了许多工作，对过去认为没有问题的数学运算加上了许多限制. 当然数学的严格性和可靠性得到了很大的进步；然而，作为其代价，直观性和灵活性丧失了不少. 数学家找出了不少“病态”的例子证明许多物理学家应用数学的办法确非无懈可击. 可是，物理学家除了表示尊敬以外，许多时候却认为数学家的“高论”其实无补于事. 那么，为了刻画自然现象，函数的光滑性确实是一个先验地合理的要求吗？其实物理学家自己也创造了不少病态的东西,只不过他们认为并非病态而已. 例子之一是狄拉克(Dirac)为了量子力学的需要所“创造”的 δ- 函数 $\delta(x)$ (其实英国工程师赫维赛德(Heaviside)已经引进了它)，其定义如下：

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\ ,\\ \infty, & x=0\ ;\end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1\ ; \tag{2}$$

而且进一步“证明”了，对任意连续函数 $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)\ . \tag{3}$$

但是这些要求是相互矛盾的. 认为由(1)，$\delta(x)$ 是“几乎处处”为零的，而几乎处处为零的函数之积分必为零而不能为 1，因而(1)式与(2)式矛盾(没有学过勒贝格(Lebesgue)积分的读者，不妨暂时承认这段话，其实物理学家也没有一定说(2)式和(3)式的积分是勒贝格积分). 但是 $\delta(x)$ 确是一个物理含义

十分清楚的"函数"：设在 x 轴上有一个质量为 1 的质点放在原点，其他位置上则没有质量. 这个很常见的质量分布之密度函数即 $\delta(x)$. (1)式表示质量集中于 $x=0$ 处，(2)式表示总质量为 1.

如果记 $\delta(x)$ 的不定积分为 $H(x)$，则

$$H(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx=\begin{cases}1\,, & t\geqslant 0\,,\\ 0\,, & t<0\,,\end{cases}\tag{4}$$

它也是首先由赫维赛德提出的. 它在电工学上很有用处：设在电路上有一个断开的开关，而在 $t=0$ 时将开关闭合使电路中有电流为 1，描述这个电流变化的函数就是赫维赛德函数 $H(t)$. 这个间断函数的"微商"就是 δ 函数.

如果更系统地讨论偏微分方程，则更易发现人们必须突破光滑函数的藩篱. 下面讲一下弦振动方程的达朗贝尔(D'Alembert)解法. 对弦振动方程

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{5}$$

作变量代换

$$\xi=x-at\,,\quad \eta=x+at\,,$$

则(5)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0\qquad 即\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0\,,$$

双方对 ξ 积分(这时 η 视为常数)有 $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=g(\eta)$，再对 η 积分(ξ 视为常数)有"通解" $u=F(\xi)+G(\eta)$ 或

$$u(x,t)=F(x-at)+G(x+at)\,,\tag{6}$$

F, G 是任意可微函数.

我们现在只看 $F(x-at)$ 一项. 当 $x-at=x_0$(常数)时 $F(x-at)=F(x_0)$(常数).

在 (x,t) 平面(称为相空间)上，$x-at=x_0$ 是一族直线(称为特征线，$x+at=x_0$ 是另一族特征线). 沿这一族的每一条特征线，$F(x-at)$ 取常数值 $F(x_0)$，相空间 (x,t) 并不是真正的物理空间. 对于弦而言，物理空间是直线 x 轴，t 是时间，相空间是一个平面而不只用一个空间的轴来表示. 在物理空间中，$F(x-at)$ 沿 $x-at=x_0$ 取常数值是什么意思呢？设 (x_1,t_1) 适合 $x_1-at_1=x_0=x_0-a\cdot 0$，$F(x_1-at_1)=F(x_0-a\cdot 0)$ 表示：当时刻 $t=0$ 发生于 x_0 处的"扰动" $F(x_0)$，当 $t=t_1$ 时又重现于 $x=x_1$ 处！或者说，这一扰动沿弦(x 轴)由 x_0 向 x_1 传播. 可以算出传播的速度. 因为

$$x_1-at_1=x_0-a\cdot 0\,,\qquad 故\ (x_1-x_0)/(t_1-0)=a\,,$$

所以这个扰动以固定的速度 a 传播. 扰动的传播称为波，所以 $F(x-at)$ 表示以速度 a(向右)传播的波 —— 正波. 同理 $G(x+at)$ 表示以速度 $-a$(向左)

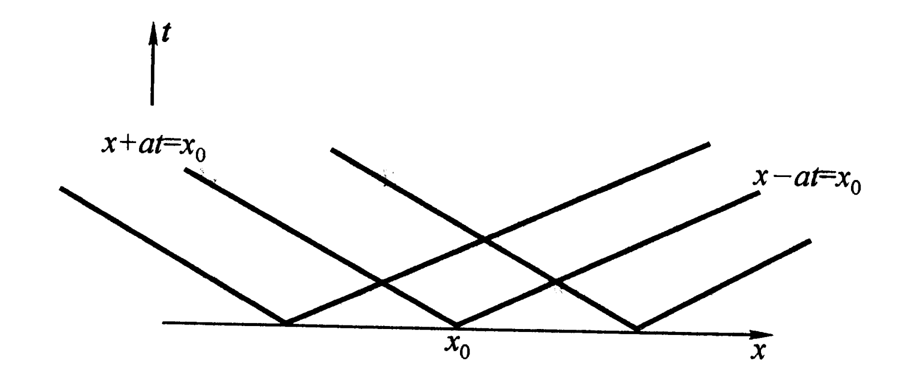


图 2－1

传播的波 —— 反波.

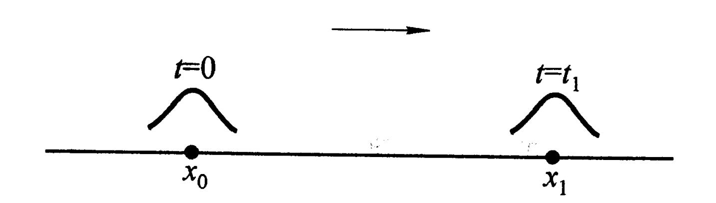


图 2－2

以上的讨论完全没有涉及 F 和 G 的光滑性. 为求"古典解"(见第一章), 应该设 $F,G\in C^2$, 但是即令 F,G 只是连续函数, $F(x-at)$ 等仍然表示波, 因此, 仍然应该认为是方程(5)之解. 物理学要求我们突破古典解的概念!

上面我们只把关于波的讨论作为必须突破古典解概念的例证. 其实这个讨论本身已是十分重要的. 这种方法称为特征线法, 是偏微分方程的基本方法之一. 我们把它继续讲下去. 设要求方程(5)的柯西问题

$$u(x,0)=f_0(x)\ ,\qquad u_t(x,0)=f_1(x) \tag{7}$$

之解. 以(6)代入(7)有

$$F(x)+G(x)=f_0(x)\ ,$$

$$-F'(x)+G'(x)=\frac{1}{a}f_1(x)\ .$$

将后式积分有 $G(x)-F(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f_1(\tau)d\tau+c$, 从而

$$G(x)=\frac{1}{2}f_0(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x f_1(\tau)d\tau+\frac{c}{2}\ ,$$

$$F(x)=\frac{1}{2}f_0(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x f_1(\tau)d\tau-\frac{c}{2}\ .$$

代入(6)即得达朗贝尔解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f_0(x+at)+f_0(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}f_1(\tau)d\tau\ . \tag{8}$$

这是偏微分方程中可以由“通解”求得“特解”的少有的(可惜!)例子之一．一般讲，若通过自变量变换及未知函数代换能把方程化为(5)的形式，则可求得其通解.

现在回到主题：怎样突破古典解的局限呢？我们还是从物理上找启示.

大约在 19 世纪 30 年代，力学的基本原理被归结为一个变分原理. 哈密顿(Hamilton)提出了最小作用原理，其内容大体如下：任一质点组(弦当然也是质点组)的真实的运动必定是在一切可能的运动中使作用量①达到最小值的. 现用这个原理来讨论两端固定的弦 $[0,l]$ 的运动. 这时，“一切可能”的运动将由“一切可能”的函数 $u(x,t)$ 来表示，不过

$$u(0,t)=u(l,t)=0. \quad (\text{两端固定.})$$

它的作用量是

$$I=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^l[\rho u_t^2-Tu_x^2]dx.$$

如果 $u(x,t)$ 是“真实”的运动，即它使 I 达到最小值，今取任一个 C^∞ 函数 $\varphi(x,t)$，使它在区域 $[t_0,t_1]\times[0,l]$ 的外部及其边界附近恒为 0(这种函数称为 C_0^∞ 函数，其确切定义见下节)，则对一个参数 λ，

$$I(\lambda)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^l[\rho(u_t+\lambda\varphi_t)^2-T(u_x+\lambda\varphi_x)^2]dx$$

当 $\lambda=0$ 时达到最小，因而应有 $I'(0)=0$. 但是

$$I'(0)=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^l[\rho u_t\varphi_t-Tu_x\varphi_x]dx.$$

用分部积分，注意到 $\varphi(x,t_0)=\varphi(x,t_1)=0$, $\varphi(0,t)=\varphi(l,t)=0$，有

$$I'(0)=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^l(Tu_{xx}-\rho u_{tt})\varphi\,dx=0.$$

由于 φ 是任意的，故有 $Tu_{xx}-\rho u_{tt}=0$，此即弦振动方程(这一点作为一个习题)，这个方程即为作用量(通常为泛函)取极小的必要条件(通常为 Euler 方程).

但是上面的作法有一基本的假设，即 $u\in C^2$. 如果不是这样，而例如只有 $u\in C^1$，则可进行另一种分部积分而有

$$I'(0)=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^l u(T\varphi_{xx}-\rho\varphi_{tt})dx=0. \tag{9}$$

在(9)式中，甚至 u 的一阶微商也没有出现！所有的微分运算都移到了很光滑的函数 φ 上面. 我们不妨认为，如果 u 是一个可积函数，而且对任意 C_0^∞

---

① 作用量即动能位能之差对时间的积分. 这个名词是汤姆逊(Thompson)和泰特(Tait)开始使用的. 下面讲作用量达到最小值是不准确的. 详见理论力学和变分法方面的书.

函数 φ 都使(9)式成立，则认为 u 是弦振动方程的“广义解”——弱解.

这个作法蕴含了一些深刻的思想. 首先，它不是考虑函数在某一点的值，而是考虑它在 C_0^∞（作为一个函数空间）上的“作用”. 例如一个局部可积（即在任何紧集上可积）函数 f 可以这样“作用”在 C_0^∞ 上：

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f\varphi\, dx, \qquad \varphi \in C_0^\infty. \tag{10}$$

(10)式定义了 C_0^∞ 上的一个线性泛函. 某一线性空间上的泛函，即是一种对应关系：使对该空间的任一 φ（在我们的例子中，该空间是 C_0^∞，故 $\varphi \in C_0^\infty$）对应于一实数（有时是复数，即复泛函），记作 $L(\varphi)$. 线性泛函即适合 $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$ 的泛函. 所以(10)是一个线性泛函，即是说，一个函数可以生成一个泛函. 这“泛函”（仍记作 f）我们说它是对偶于 C_0^∞ 的. 其次原来应施于 f 上的微分运算现在对偶地移到了 C_0^∞ 上. 20 世纪 30 年代苏联数学家索伯列夫(Соболев, Sobolev)提出广义解时的基本思想就是这样（他不是用这个例子）.

这个概念可以推广到一般的 C^∞ 系数的线性 m 阶偏微分方程

$$Pu = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u = f(x). \tag{11}$$

其中，我们引用了著名的重指标记号：$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbf{Z}_+$，即 α_i 为非负整数，$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}$，$a_\alpha(x) \in C^\infty$，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 为重指标 α 的“长度”，若 u 为(11)的古典解，则对任意 $\varphi \in C_0^\infty$，有

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi\rangle &= \int f(x)\varphi(x)dx = \int (Pu)\varphi(x)dx \\ &= \int \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u\varphi\, dx \\ &= \int u \sum_{|\alpha|\leqslant m}(-\partial)^\alpha(a_\alpha(x)\varphi(x))dx \\ &\triangleq \int u\,{}^tP\varphi\, dx \\ &= \langle u, {}^tP\varphi\rangle.\end{aligned}$$

这样，把对未知函数 u 的微分转移到 C_0^∞ 函数 φ 上，${}^tP$ 称为偏微分算子 P 的转置算子，它把 C_0^∞ 映射到 C_0^∞，方程(11)的广义解是指存在 C_0^∞ 上的一个 泛函 u，使得

$$\langle u, {}^tP\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty,$$

其中 f 为 C_0^∞ 上的一已知泛函. 显然，古典解必为广义解. 以上

$${}^tP(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha(\cdot)\varphi(x)).$$

${}^tP$ 的定义详见本章(31)式.

由此到广义函数只需要再向前进一步. 既然一个“普通的”函数可以通过(10)式生成一个线性泛函，何不认为 C_0^∞ 上的一个线性泛函就是一个“广义

的"函数？如果采用这样的观点，则 $\delta(x)$ 确实是一个广义函数：它使任一个 $\varphi\in C_0^\infty$ 对应于 φ 在 0 点的值：记为

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0),$$

此即(3)式. 不难验证它是线性泛函：

$$\begin{aligned}\langle\delta,c_1\varphi_1+c_2\varphi_2\rangle&=(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(0)\\&=c_1\langle\delta,\varphi_1\rangle+c_2\langle\delta,\varphi_2\rangle.\end{aligned}$$

所以广义函数本质地扩大了函数的范围.

其实，一个"普通的"函数通过(10)式生成的线性泛函还自然包含了关于 $\varphi\in C_0^\infty$ 的某种连续性，所以，广义函数应为 C_0^∞ 上的一个连续线性泛函，为了说明连续性，还必需对 C_0^∞ 赋以拓扑，下一节我们将作出这点.

1950 年左右，法国数学家施瓦兹(Schwartz)①提出广义函数论的基本思想如上. 这里的核心是对偶的概念，它其实只是抽象形式的分部积分理论.

从上面的概述可见，一条基本的线索是探寻怎样能更好地反映自然规律，而必要时要以适当方式打破某些已有的限制. 所以，广义函数论尽管看来抽象，实际上不但在数学上而且在物理上都有着深厚的基础.

习　题

1. 求解下列定解问题：

(1) $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{x-at=0}=\varphi(x),\quad u|_{x+at=0}=\psi(x),\quad \varphi(0)=\psi(0).\end{cases}$

(2) $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u|_{x-at=0}=\psi(x),\quad \varphi(0)=\psi(0).\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0,\\ u|_{y=1}=\varphi(x),\quad u_y|_{y=1}=\psi(x).\end{cases}$

(4) $\begin{cases}u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2x\,u_{yy}-\sin x\,u_y=0,\\ u|_{y=\sin x}=\varphi_0(x),\quad u_y|_{y=\sin x}=\psi_1(x).\end{cases}$

2. 证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

的一般解可写为

$$u(x,t)=\frac{1}{h-x}[F(x-at)+G(x+at)],$$

---

① 另一个著名的数学家 Schwarz 是德国人. 但其汉语音译为施瓦茨，有时也有人写作施瓦兹. 为避免混淆，他们二人的名字均用原文. 著名的 Schwarz 不等式是

$$\int|fg|\,dx\leqslant\left(\int|f|^2dx\right)^{1/2}\left(\int|g|^2dx\right)^{1/2}.$$

并由此求解它的初值问题

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

3. 求方程 $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ 形如 $u = f(r,t)$ 的解(称为球对称解)，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. 设 $\eta(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$，且 $\eta|_{\partial\Omega} = 0$，其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 之边界，若 f 在 Ω 中连续，且对所有上述 $\eta(x,y)$ 有

$$\iint_\Omega f(x,y)\eta(x,y)dxdy = 0,$$

则 f 在 Ω 中恒为零.

5. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 为有界开区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 之边界，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 为在 $\partial\Omega$ 上已知的可微函数，求极值问题

$$J = \iint_\Omega [u_x v_x - \frac{1}{2}(vu_y - uv_y)]dxdy = \min$$

的必要条件(Euler 方程组).

6. 用达朗贝尔公式写出初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = |x|, \quad u_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的解，并考察初值在 $t = 0$ 的不可微性随时间 t 的传播.

§2. 基本空间

1. **基本定义和例子** 上文我们已经提到，广义函数应该定义为某个函数空间上的线性泛函. 这个函数空间(称为基本空间)中的元应该是充分光滑的. 从上面关于变分法的讨论来看，我们第一个考虑的空间是 $C_0^\infty(\Omega)$，$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集. 我们给出一个定义.

定义 2.2.1. 使一函数 $f(x)$ 之值不为 0 之点的集合之闭包称为函数 $f(x)$ 的支集，记作 $\operatorname{supp} f$，即有

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}. \tag{12}$$

$C_0^\infty(\Omega)$ 即具有紧支集(即支集为紧集①)于 Ω 内的光滑函数(以下如无特别声明，"光滑"恒指"任意阶可微")的空间. 以下我们需要这些线性泛函具有连续性，为此需要在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中定义一种收敛性，即定义一个序列 $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中趋于0的意义. 于是我们给出

---

① 紧集即有界闭集. 在数学分析中许多涉及有界闭集的定理都是讲的紧集. 我们以后就常用紧集一词. 现代的数学文献中时常是这样用的.

定义 2.2.2. 函数序列 $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中趋于0即指：

(i) 存在一个紧集 $K \subset \Omega$ 使对一切 $\varphi_n(x)$

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K ;$$

(ii) $\varphi_n(x)$ 之任意固定阶微商之序列皆对 x 一致收敛于0(不要求对于微商的阶数具有一致性).

首先应该回答的问题是：$C_0^\infty(\Omega)$ 函数是否存在？这里最常见的一个函数是由

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t), & t > 0 ; \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{13}$$

生成的. 在数学分析中我们熟知 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上(包括在 $t=0$ 处)具有任意阶连续微商，而且 $f^{(k)}(0) = 0$ (一切 k). 设 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, 则利用(13)式可以构造出

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(1 - |x|^2) \\ &= \begin{cases} \exp(1/(|x|^2 - 1)), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

它也是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数，其支集是球心在原点的闭单位球体. 同样，对任意正常数 r, $\varphi((x - x_0)/r) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，其支集是以 x_0 为心，以 r 为半径的闭球体. 下面我们将会看到，$C_0^\infty(\Omega)$ 函数是很丰富的.

定义 2.2.3. $C_0^\infty(\Omega)$ 赋以上述收敛性以后称为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 空间，上述的趋于0时常称为“在 $\mathscr{D}$ 中趋于0”.

$\mathscr{D}(\Omega)$ 是最常见的基本空间，它的元素常称为试验函数.

2. 函数的磨光化 C_0^∞ 函数不仅是广义函数论的基础，其本身在数学分析中也是极重要的. 下面讲的第一个应用是如何构造 C_0^∞ 函数来逼近任意连续函数. 为此，我们先引进一些常见的记号. $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 代表 $\mathbf{R}^n$ 中一点，$\partial_x = (\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n})$, $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$，其中 i 为虚数单位，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ (非负整数集)，为一个 n 维重指标；记 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$; $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$; $\alpha \geqslant \beta$ 表示 $\alpha_i \geqslant \beta_i$, $i = 1, \cdots, n$; $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$. 这些记号始自 Schwartz，故称为 Schwartz 记号.

设 $f(x)$, $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$，皆为 $\mathbf{R}^n$ 中的连续函数，又设其中至少一个(例如 $f(x)$)具有紧支集，我们称

$$h(x) = \int f(\tau) g(x - \tau) d\tau \tag{15}$$

为其卷积，记作 $(f * g)(x)$. 因为上式中的积分实际上是在一个紧集 $\operatorname{supp} f$ 上进行，所以积分的存在是可保证的. 如果作变换 $\tau \mapsto x - \tau$，则又有

$$h(x)=\int g(\tau)f(x-\tau)d\tau\ . \tag{15'}$$

即是说，卷积是可交换的：$f*g=g*f$. 卷积是一个极重要的概念，在下一章中我们将用物理中的例子说明它在物理中的重要性. 现在我们只提出：由(15)式，$(f*g)(x)$ 实际上是 $g(x)$ 在平移 τ(成为 $g(x-\tau)$)后，按其平移量 τ 加权($f(\tau)d\tau$) 求和(积分)，因此，它应该保有 $g(x)$ 的许多性质，例如可微性. 同样，由(15′)，$f*g$ 也应保有 $f(x)$ 的许多性质.

现在取 $g(x)$ 为 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数，并设 $\operatorname{supp} g$ 位于以原点 $O\in\mathbf{R}^n$ 为心，1为半径的球内(例如(14)中的 $\varphi(x)$)而且

$$c=\int g(x)dx\neq 0\ .$$

于是作 $\varphi_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{c\varepsilon^n}g\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$，我们有

$$\int\varphi_\varepsilon(x)dx=\frac{1}{c\varepsilon^n}\int g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx=\frac{1}{c}\int g(x)dx=1\ .$$

以 $\varphi_\varepsilon(x)$ 为“核”按(14)式作其与连续函数 $f(x)$ 的卷积

$$f_\varepsilon(x)=\int f(\tau)\varphi_\varepsilon(x-\tau)d\tau=(J_\varepsilon f)(x)\ . \tag{16}$$

$f_\varepsilon(x)$ 称为 $f(x)$ 的磨光化(或正则化、规则化，以下将要混用而不加区别). J_ε 称为磨光算子，φ_ε 称为磨光核((14)中的 $\varphi(x)$ 就是一个常见的磨光核，但决非唯一的. 在许多数学问题中，如何构造出具有特定性质的磨光核常是解决问题的关键性的步骤).

定理 2.2.4. 如果 $f\in C^k(\mathbf{R}^n)$，则在任一紧集 K 上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\partial^\alpha f_\varepsilon(x)=\partial^\alpha f(x)\ ,\ |\alpha|\leqslant k\ . \tag{17}$$

如果进一步设 $f\in C_0^k(\mathbf{R}^n)$ 则

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon\subset\{\,x;\ \operatorname{dist}(x,\operatorname{supp} f)\leqslant\varepsilon\}\ . \tag{18}$$

这里 $\operatorname{dist}(x,\operatorname{supp} f)=\inf\limits_{y\in\operatorname{supp} f}|x-y|$ 为 x 到 $\operatorname{supp} f$ 的距离.

证 先证(18)式. 设取一点 x 到 $\operatorname{supp} f$ 的距离大于 ε，则因(16)式中的积分实际上是在以 x 为心，ε 为半径的球上进行，在此球内 $f(\tau)\equiv 0$，从而 $f_\varepsilon(x)=0$. 故(18)式得证. 又由积分号下求微商和分部积分：

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x)&=\int f(\tau)\partial_x^\alpha\varphi_\varepsilon(x-\tau)d\tau=(-1)^{|\alpha|}\int f(\tau)\partial_\tau^\alpha\varphi_\varepsilon(x-\tau)d\tau\\&=\int\partial_\tau^\alpha f(\tau)\varphi_\varepsilon(x-\tau)\,d\tau\ .\end{aligned}$$

这里没有积分号外的项，这是因为，若限定 x 位于某点附近，则 $\varphi_\varepsilon(x-\tau)$ 当 $|\tau|$ 充分大时必为0.

又因

$$\int \varphi_\varepsilon(x-\tau)d\tau = \int \varphi_\varepsilon(\tau)\, d\tau = 1 \ ,$$

所以

$$\partial_x^\alpha f(x) = \int \partial_x^\alpha f(x)\varphi_\varepsilon(x-\tau)\, d\tau \ ,$$

因此

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \int [\partial_\tau^\alpha f(\tau) - \partial_x^\alpha f(x)] \varphi_\varepsilon(x-\tau)\, d\tau \right| \\ &\leqslant \sup_{|x-\tau|<\varepsilon} |\partial_\tau^\alpha f(\tau) - \partial_x^\alpha f(x)| \int |\varphi_\varepsilon(x-\tau)| d\tau \\ &= \sup_{|x-\tau|<\varepsilon} |\partial_\tau^\alpha f(\tau) - \partial_x^\alpha f(x)| \int |\varphi_\varepsilon(\tau)| d\tau \ , \end{aligned}$$

当 $x \in K$ 时，因 $|x-\tau| < \varepsilon$, $\tau \in K_\varepsilon = \{x; \operatorname{dist}(x,K) \leqslant \varepsilon\}$，由 $f \in C^k(\mathbf{R}^n)$ 知 $D^\alpha f$ 在 K_ε 一致连续，故当 $\varepsilon \to 0$ 时上式一致趋于0.

如果还有 $\varphi(x) \geqslant 0$（例如取(14)中的 φ 作磨光核)，则上式中的 $\int |\varphi_\varepsilon(\tau)| d\tau = \int \varphi_\varepsilon(\tau)\, d\tau = 1$. 证毕.

这个定理中对磨光核 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的条件可大大放宽，实际上只要保证微分后的卷积积分收敛. 例如可取 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$（其定义见第四章)，定理结论仍然成立. 另外，这个定理还可以大大地推广. 例如假设 $f(x)$ 仅为可积，记作 $f(x) \in L^1$(注意 $\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx$)，或者 p 幂可积，记作 $f(x) \in L^p$(注意 $\|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}$)，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^1} = 0 \qquad \text{即} \quad f_\varepsilon \to f \quad \text{于 } L^1,$$

或

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} = 0 \qquad \text{即} \quad f_\varepsilon \to f \quad \text{于 } L^p.$$

这就是说，我们可以在某种给定度量的意义下用充分光滑(例如 C^k)的函数列去逼近仅仅 p 幂可积的函数，这时对磨光核的要求是它的直到 k 阶微商都属于 L^1，这一些我们均不再证明.

下面我们给出本定理的一个有趣的应用，其结果是非常有用的. 设有区域 Ω_1 含于 Ω_2，而 $\overline{\Omega}_1$ 为紧，且 $\overline{\Omega}_1 \subset \mathring{\Omega}_2$($\mathring{\Omega}_2$ 表示 Ω_2 的内域，即不包含边界点)，这种情况我们记作 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$.

定理 2.2.5. *如果 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$，则存在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数 $\varphi(x) \geqslant 0$，使得*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1; \\ 0, & x \overline{\in} \Omega_2. \end{cases}$$

证 为此，由于 Ω_2 的边界 $\partial\Omega_2$ 到 Ω_1 的距离

$$d = \inf_{P_1 \in \Omega_1, P_2 \in \partial\Omega_2} |P_1 P_2| > 0 \ ,$$

记 $d=3r$，以及 $\Omega_1^r=\{x;\ \mathrm{dist}(x,\Omega_1)\leqslant r\}$，并作其特征函数 $\chi(x)$：

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega_1^r,\\ 0, & x\overline{\in}\Omega_1^r,\end{cases}\tag{19}$$

再以 $\varphi_r(x)$ 为磨光核作 $\chi(x)$ 的磨光化：

$$\varphi(x)=(\varphi_r*\chi)(x)=\int\chi(\tau)\varphi_r(x-\tau)d\tau,\tag{20}$$

$\varphi(x)$ 即适合所求. 事实上，利用积分号下求微商立刻可知 $\varphi(x)\in C^\infty$. 同时，由于积分(20)实际上是在 $\mathrm{supp}\,\varphi_r$ 上，即在以 x 为心，r 为半径的球上进行，

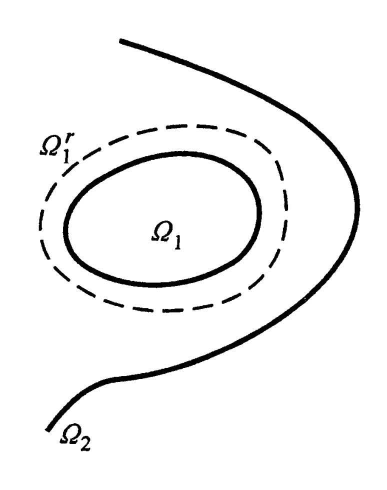


图 2-3

而当 x 在 Ω_1 内时，这球全在 Ω_1^r 内，从而 $\chi(x)\equiv1$ 而(19)式成为

$$\varphi(x)=\int\varphi_r(x)\,dx=1,\qquad x\in\Omega_1.$$

当 x 在 Ω_2 以外时，x 到 Ω_1^r 的距离不小于 $2r$，从而此球全在 Ω_1^r 之外，因此 $\chi(x)\equiv0$；从而

$$\varphi(x)=\int0\cdot\varphi_r(x)\,dx=0,\qquad x\overline{\in}\Omega_2$$

(实际上，当 x 在 Ω_1^{2r} 以外时即有 $\varphi(x)\equiv0$)，所以 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 这样作出的 $\varphi(x)$ 称为一个截断函数，它是数学分析中的重要工具.

函数的磨光化是数学分析的一个重要技巧，它允许我们在处理不光滑的函数时，常常可以用光滑函数去代替它.

3. **单位分解** 这是整个数学中都很重要的概念. 它的作用是把一个整体的问题化为许多局部问题. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$，$\mathscr{O}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$是一族开集，其中 I 是指标集. 而且 $A\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$. 这样的开集族称为 A 的一个开覆盖. 于是我们可以证明：

定理2.2.6. 对于 A 的任意开覆盖 $\mathscr{O}$，必存在一组 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数族 $\Phi=\{\varphi_\alpha(x)\}$，使

(i) $0\leqslant\varphi_\alpha(x)\leqslant1$；

(ii) 任一点 $x\in A$ 均有一个邻域 V 使得只有有限多个 $\varphi_\alpha(x)$ 在 V 上不为0，亦即只有有限多个 $\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha(x)$ 与 V 之交非空. 这个性质说成是 $\{\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha(x)\}$ 为局部有限的；

(iii) $\sum_\alpha\varphi_\alpha(x)=1$. 因为每一点 x 只落在有限多个 $\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha(x)$ 之中，所以上述的和在每一点 x 上实际上是有限和而不会发生收敛性问题；

(iv) 对任意 $\alpha\in I$，$\varphi_\alpha(x)$ 的支集必位于 U_α 中.

这一 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数族 Φ 称为一从属于 $\mathscr{O}$ 的 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 单位分解(以下简称单

位分解).

证　证明分几个步骤.

(i)设 A 为紧集，则由有限覆盖定理可以选出有限多个开集 $U_1,\cdots,U_N$ 覆盖 A. 现在要作出有限多个开集 $D_1,\cdots,D_N$，使得 $D_i\subset\subset U_i$，$i=1,\cdots,N$，且它们仍然覆盖 A. 其作法如下：如果 $N=1$，则有 $U_1\supset A$，令 $\delta=\mathrm{dist}(A,\complement U_1)$，其中 $\complement U_1$ 为 U_1 的余集，则 $\delta>0$，取 $D_1=A^{\frac{\delta}{2}}$ 为 A 的 $\frac{\delta}{2}$ 邻域，D_1 即为所求. 如果 $N>1$，记 $A_1=A\backslash(U_2\cup\cdots\cup U_N)$，它为紧集，于是按照上面的办法可构造 D_1，使得 $D_1\subset\subset U_1$，且它覆盖 A_1 及 $\{D_1,U_2,\cdots,U_N\}$ 覆盖 A，归纳地作下去，设已作出 $D_1,\cdots,D_k$，使得 $D_i\subset\subset U_i$，$i=1,\cdots,k$，$\{D_1,\cdots,D_k,U_{k+1},\cdots,U_N\}$ 覆盖 A，记 $A_{k+1}=A\backslash(D_1\cup\cdots\cup D_k\cup U_{k+2}\cup\cdots\cup U_N)$，它为紧集，于是按照上面的办法可构造 D_{k+1}，使得 $D_{k+1}\subset\subset U_{k+1}$，且 $\{D_1,\cdots,D_{k+1},U_{k+2},\cdots,U_N\}$ 覆盖 A.

因为 $D_i\subset\subset U_i$，$i=1,\cdots,N$，由定理2.2.5即可作出 $\psi_i\in C_0^\infty(U_i)$ 且 $\psi_i(x)\geqslant 0$ 及在 D_i 上为正，因为 $A\subset\bigcup_i D_i$，所以

$$\sum_i \psi_i(x)>0\ ,\quad x\in A\ ,$$

还有 $\mathrm{supp}\,\psi_\alpha\subset\mathrm{supp}\sum_i\psi_i(x)$，于是可令 $\varphi_\alpha(x)=\psi_\alpha(x)\Big/\sum_i\psi_i(x)$，$\alpha=1,\cdots,N$；当 $\alpha\neq 1,\cdots,N$ 时，令 $\varphi_\alpha(x)\equiv 0$，则 $\{\varphi_\alpha(x)\}(\alpha\in I)$ 即为所求从属于 $\mathscr{O}$ 的单位分解.

(ii) 设 A 不为紧集，令 $A_i=\{x;\ x\in A,|x|\leqslant i,\ \mathrm{dist}(x,\partial A)\geqslant\frac{1}{i}\}$，则 A_i 皆为紧集且满足条件：$\mathring{A}_i\subset\mathring{A}_{i+1}$ 及 $A=\bigcup_k A_k$(我们称满足上述条件的一串紧集 $A_1,\cdots,A_k,\cdots$ 为紧包含地上升穷竭于 A). 这时，令 $\mathscr{O}_i=\{U_\alpha\cap(\mathring{A}_{i+1}\backslash A_{i-2}),\ \alpha\in I\}$，而且 $i\leqslant 2$ 时认为 $A_{i-2}=\varnothing$. 于是 $\mathscr{O}_i$ 是紧集 $B_i=A_i\backslash\mathring{A}_{i-1}(A_0=\varnothing)$ 的开覆盖. 作 B_i 的从属于 $\mathscr{O}_i$ 的单位分解 $\Phi_i=\{\varphi_\alpha^{(i)}\}_{\alpha\in I}$. 对于任一 $x\in A$，必有一个 i 使 $x\in B_i$ 但 $x\overline{\in}B_j$，$j\geqslant i+2$，所以对于 Φ_j 中的 $\varphi_\alpha^{(j)}$，有 $\varphi_\alpha^{(j)}(x)=0$，从而

$$\sigma(x)=\sum_{\alpha,j}\varphi_\alpha^{(j)}(x)$$

在任一点 x 附近皆为有限和，从而 $\sigma(x)$ 有意义. 今定义 $\varphi_\alpha(x)=\sum_j\varphi_\alpha^{(j)}(x)/\sigma(x)$，$\{\varphi_\alpha(x)\}(\alpha\in I)$ 即为所求的单位分解.

4. **博雷尔定理**　C^∞ 函数和解析函数有本质的区别. 我们说 $f(x)$ 是 x 在 x_0 附近的解析函数，即指在 x_0 附近 $f(x)$ 的泰勒(Taylor)级数收敛于 $f(x)$：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r.$$

但是C^∞函数的泰勒级数不一定收敛于它. 最著名的例子就是

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因为我们有$f^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, \cdots$, 所以它的泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$, 而不收敛于$f(x)$. 所以, 关于$C^\infty$函数$f(x)$的泰勒级数, 只能写为$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$, 而不能一般写为$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. 但是我们有以下著名的定理:

定理 2.2.7.(博雷尔(Borel)定理) 设$K \subset \mathbf{R}^n$为一紧集, $I \subset \mathbf{R}$是包含$(-\varepsilon, \varepsilon)$的紧区间, $f_n(x) \in C_0^\infty(K)$, $n=0, 1, \cdots$, 是任意已给的函数, 这时必存在函数$f(x,t) \in C^\infty(K \times I)$以$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!}t^n$为泰勒级数.

证 任取函数$g(t) \in C_0^\infty(I)$而且在$t=0$附近$g(t) \equiv 1$. 我们取一串适当的$\varepsilon_j \downarrow 0$并令

$$g_n(x,t) = g(t/\varepsilon_n) \frac{f_n(x)}{n!}t^n,$$

可以使得对任意重指标$\alpha = (\alpha_x, \alpha_t)$有

$$|\partial^\alpha g_n(x,t)| < 2^{-n}. \quad |\alpha| \leqslant n - 1.$$

事实上, 因为$|\partial_t^{\alpha_t} g(t)| \leqslant M_\alpha$, 从而有

$$|\partial^\alpha g_n(x,t)| = \left| \partial_t^{\alpha_t}\left(g\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) \frac{t^n}{\varepsilon_n^n}\right) \partial_x^{\alpha_x} f_n(x) \varepsilon_n^n / n! \right|$$
$$\leqslant C_{\alpha,n} \varepsilon_n^{n-\alpha_t}.$$

因为$\alpha_t \leqslant n-1$, 故适当取ε_n后可使上式$<2^{-n}$. 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!} g(t/\varepsilon_n) t^n \tag{21}$$

收敛, 记其和为$f(x,t)$, 易见$f(x,t) \in C^\infty(K \times I)$且

$$f(x,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!} t^n.$$

证毕.

这个定理告诉我们, 一般的C^∞函数的泰勒级数只是形式级数. 但我们可以用级数(21)代替它, 而多少起到泰勒级数的作用. 在广义函数出现以前, 在解析函数范畴中的偏微分方程理论已经解决了最基本的存在问题. 广义函数论以后的线性偏微分方程理论可以说是C^∞理论. 这时, 我们丧失了泰勒级数这个有力的工具, 但博雷尔定理可以在一定程度上给以补足. 当然, 以$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!}t^n$为形式泰勒级数的$f(x,t)$不是唯一的.

习　题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而且对任意 $\varphi\in C_0^\infty((a,b))$ 皆有 $\int f(x)\varphi(x)dx=0$，证明 $f(x)\equiv 0$（杜·波阿·雷蒙(du Bois-Reymond)引理）.

2. 设 $P(x,D)$ 是一个 C^∞ 系数的线性偏微分算子. 证明：

(1) $P(x,\xi+\eta)=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha P^{(\alpha)}(x,\eta)$；

(2) 利用莱布尼茨公式 $\partial^\alpha(u\cdot v)=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\partial^\beta u\cdot\partial^\gamma v$ 证明

$$P(x,\partial)(uv)=\sum_\alpha \partial^\alpha u\cdot R_\alpha(x,\partial)v,$$

$R_\alpha(x,\partial)$ 是一个 C^∞ 系数的线性偏微分算子；

(3) 证明 $P(x,\partial)e^{x\cdot\eta}=P(x,\eta)e^{x\cdot\eta}$，这里 $x\cdot\eta=x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n$；

(4) 在(2)中令 $u=e^{x\cdot\xi}$，$v=e^{x\cdot\eta}$，再用(1)，(3)证明(2)中的 $R_\alpha(x,\partial)=\frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(x,\partial)$.

此题中得到的

$$P(x,\partial)(uv)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha uP^{(\alpha)}(x,\partial)v$$

是一个重要的公式，称为推广的莱布尼茨公式. 又以后对任一函数 $F(x,\xi)$ 恒记 $F_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)=\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha F(x,\xi)$，即下标表示对 x 求导，上标表示对 ξ 求导.

3. 利用上题计算 $\Delta(u\cdot v)$ 和 $\Delta^2(u\cdot v)$，这里 $\Delta=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，并证明

$$e^{-x\cdot\xi}P(x,\partial)(u(x)e^{x\cdot\xi})=P(x,\partial+\xi)u(x).$$

4. 若 $f(x)\in L^1$，证明

$$\lim_{x\to 0}\|f_\varepsilon(x)-f(x)\|_{L^1}=\lim_{x\to 0}\int|f_\varepsilon(x)-f(x)|dx=0.$$

5. 设 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且 $\int\varphi(x)dx=1$，$v\in C^0(\mathbf{R}^n)$，令

$$u(x,t)=\int v(x-ty)\varphi(y)dy,$$

证明：

(1) $\partial_{x_i}(t^ku(x,t))=t^{k-1}\int v(x-ty)\partial_{y_i}\varphi(y)ydy,\ t>0$；

$$\partial_t(t^ku(x,t))=t^{k-1}\int v(x-ty)((k-n)\varphi(y)-\sum_i y_i\partial_{y_i}\varphi(y))dy,\ t>0.$$

[提示：先作变换使 $t^ku(x,t)=t^{k-1}\int v(y)\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)dy$.]

(2) 利用上式证明当 $t\to 0^+$ 时

$$\partial_t^j(t^ky(x,t))\to 0,\quad j<k;$$
$$\partial_t^k(t^ku(x,t))\to k!v(x).$$

6. 设 $f_\varepsilon(x)=\int\varphi_\varepsilon(x-y)dy$，$\varphi_\varepsilon(x)$ 是一个磨光核. 试证：对任何重指标 α 有

$$|\partial^\alpha f_\varepsilon(x)|\leqslant C(\alpha,n)\varepsilon^{-|\alpha|}.$$

7. 令 $H_a(x)=\begin{cases}a^{-1}, & 0<x<a\\ 0, & \text{其他 } x\end{cases}$，则若 $u(x)\in C^0(\mathbf{R})$，证明

$$(u*H_a)(x)=a^{-1}\int_{x-a}^{x}u(t)dt\ ,$$

从而是一个 C^1 函数；若 $u\in C^k(\mathbf{R})$，则 $(u*H_a)(x)\in C^{k+1}(\mathbf{R})$. 这说明即令是对间断函数作卷积，也有一定程度的磨光作用.

8. 设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为一紧集，$\{X_a\}$是 U 的开覆盖.

(1) 证明:必有有限多个开集 $K_1,\cdots,K_k$，使 $K_i\subset\subset X_i$，而且$\{K_i\}$仍是 U 的开覆盖.

(2) 如前作 $\psi_i(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$使$0\leqslant\psi_i(x)\leqslant 1$，而且在 K_i 上 $\psi_i(x)=1$，在 X_i 外 $\psi_i(x)=0$，于是

$$\psi_1,\psi_2(1-\psi_1),\cdots,\psi_k(1-\psi_{k-1})\cdots(1-\psi_1)$$

是 U 的从属于$\{X_a\}$的单位分解.

[提示：证明$1-[\psi_1+\psi_2(1-\psi_1)+\cdots+\psi_k(1-\psi_{k-1})\cdots(1-\psi_1)]=\prod_{j=1}^{k}(1-\psi_j)=0.$]

这是定理2.2.6的(i)的另一证明.

§3. 广义函数及其基本运算

1. **基本定义** 广义函数即 $\mathscr{D}(\Omega)$上的连续线性泛函，这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个开集. 确切说，有

定义2.3.1 广义函数即 $\mathscr{D}(\Omega)$上的连续线性泛函 $l(\varphi)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，亦即

(1) 对实数或复数 c_1，c_2有

$$l(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1l(\varphi_1)+c_2l(\varphi_2);\tag{22}$$

(2) 若 $\varphi_j\to 0$(于 $\mathscr{D}$ 中)，则 $l(\varphi_j)\to 0$(连续性)，我们也常将 $l(\varphi)$写作 $\langle l,\varphi\rangle$.

l 是一个广义函数，就记作 $l\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

以后我们常省略连续二字而简称之为线性泛函. 连续性有一个等价的表示法：

(3)对任一紧集 $K\subset\Omega$ 必存在常数 c 与非负整数 k 使得

$$|l(\varphi)|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|\partial^\alpha\varphi|\ ,\quad \varphi\in C_0^\infty(K)\ .\tag{23}$$

这个条件有时应用起来较为方便. 等价性的证明如下：

设不等式(23)成立. 任取一串 $\varphi_m(x)\in\mathscr{D}(\Omega)$，在 $\mathscr{D}(\Omega)$中收敛于0，则由定义2.2.2存在一个紧集 $K\subset\Omega$ 使对一切 $\varphi_m(x)$皆有 $\operatorname{supp}\varphi_m(x)\subset K$，而且

对任一固定的 α，$\partial^\alpha \varphi_m$ 在 K 中一致收敛于0，即$\sup\limits_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi_m|=\sup\limits_{x\in \mathbf{R}^n}|\partial^\alpha\varphi_m(x)|\to 0$，故由(23)式有 $l(\varphi_m)\to 0$，即 l 为连续线性泛函.

反之，设不等式(23)不成立，即有某个紧集 K，使对任意常数 c 与 k 皆有一个函数 $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(K)$而(23)不成立. 不妨令 $c=k=j$，即有

$$|l(\varphi_j)|>j\sum_{|\alpha|\leqslant j}\sup|\partial^\alpha\varphi_j|\ .$$

用$\dfrac{\varphi_j}{|l(\varphi_j)|}$(注意由上式 $l(\varphi_j)\neq 0$)代替 φ_j 有

$$1>j\sum_{|\alpha|\leqslant j}\sup|\partial^\alpha\varphi_j|\ ,\quad \varphi_j\in C_0^\infty(K)\ .$$

但由它有 $|\partial^\alpha\varphi_j|\leqslant\dfrac{1}{j}$，$\varphi_j\in C_0^\infty(K)$. 因此由定义2.2.2，$\varphi_j$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$中趋于0，但 $l(\varphi_j)=1$不趋于0. 即是说，l 不是连续泛函.

例1. 若 $f(x)$是 Ω 上的局部可积函数(即在 Ω 的任意紧子集上可积的函数，这个函数空间记作 $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$)，则对任一 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$l(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx \tag{24}$$

实际上是在 Ω 的紧子集 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 上积分，因而是有意义的. 容易证明它符合定义2.3.1，所以每个局部可积函数都按(24)式生成一个广义函数，我们仍记之为 $f(x)$或 f. 这种广义函数称为正则广义函数.

例2. δ 函数定义为对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，

$$\delta(\varphi)=\varphi(0)\ .$$

容易证明它是一个广义函数且(23)式中的 $k=0$. 由§1中可以看到，δ 确有一定的奇异性，而且可以证明，决不存在一个局部可积函数 f 按(24)式生成 δ，所以广义函数确实推广了函数的概念. 正则广义函数以外的广义函数统称为奇异广义函数.

从以上广义函数的定义可见，谈不上广义函数 $f(x)$在一点的值(但我们仍记为 $f(x)$以示 x 是 Ω 中的变量而与其他的参数或变量区别，这样，$f(x)$在 $\varphi(x)$上之值将记为$\langle f(x)\ ,\varphi(x)\rangle$或$\langle f\ ,\varphi\rangle$). 也谈不上 $f(x)$在某一点为0. 但是 $f(x)$在某一开集 U 中为0是有意义的. 我们有

定义2.3.2. 若对一切 $\varphi\in C_0^\infty(U)$皆有$\langle u\ ,\varphi\rangle=0$就说广义函数 u 在 U 上为0.

定义2.3.3. 广义函数 u 的支集 $\mathrm{supp}\,u$ 是 u 在其上为0的最大开子集的余集，即是说

$$\mathrm{supp}\,u=\{x;\ \text{存在开集}\ U\subset\Omega,\ \text{使得}\ x\in U\ \text{且}\ u\ \text{在}\ U\ \text{上为}\ 0\}\ \text{的余集}. \tag{25}$$

$\mathrm{supp}\,u$ 恒为闭集.

定义2.3.4. 两个广义函数 u_1, u_2之差 u_1-u_2若在 U 上为0，就说 u_1与 u_2在 U 上相等.

广义函数作为线性泛函，其线性运算如加法及数乘的定义是自明的.

广义函数 u 虽谈不上在某一点的值，但确有局部性质. 若 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，而 U 是 Ω 的任一开子集，则因为 $\mathscr{D}(U)\subset\mathscr{D}(\Omega)$，所以 u 自然地可以作用在 $\mathscr{D}(U)$之元上而成为其上的连续线性泛函(这一点留作一个习题)，也就是成为 $\mathscr{D}'(U)$之广义函数，但我们仍记之为 u，从而 $u\in\mathscr{D}'(U)$. 这个广义函数称为 u 在 U 上的限制，记作 $u|_U$. 我们有

定理2.3.5.(**局部化原理**) 若 u 在 Ω 上为0，则它在 Ω 之任一开子集上的限制为0；反之，若 Ω 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，而 $u|_{U_\alpha}=0$(对一切 α)，则 $u=0$.

证 定理的第一部分自明，现证后一部分. 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，令 $K=\operatorname{supp}\varphi$，则 K 为紧子集而由有限覆盖定理必可从 $\{U_\alpha\}$ 中找到 K 的一个有限子覆盖 $\{U_1, \cdots, U_k\}$. 作从属于它的单位分解 $\psi_1, \cdots, \psi_k$，则

$$\varphi=\varphi\sum_{j=1}^{k}\psi_j=\sum_{j=1}^{k}\varphi\psi_j=\sum_{j=1}^{k}\varphi_j, \qquad \varphi_j=\varphi\psi_j,$$

$\operatorname{supp}\varphi_j\subset\operatorname{supp}\psi_j\subset U_j$，而由于 $u|_{U_j}=0$. 故 $u(\varphi_j)=0$. 从而

$$u(\varphi)=\sum_{j=1}^{k}u(\varphi_j)=0 .$$

即 u 为0泛函. 证毕

这是我们第一次看到怎样用单位分解把一个整体问题化为局部问题.

2. **微分运算与乘子运算** 我们仍然从古典的光滑函数 $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$，作为一个广义函数开始(这个古典光滑函数当然是 $\mathbf{R}$ 上的局部可积函数，但不一定在 $\mathbf{R}$ 上可积；前者是指任一有界闭区间$[a,b]$上，$\int_a^b f(x)dx$ 都存在，后者是指 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 存在，从这个例子可以明白这两个概念的差别了). 这时 $f'(x)$仍是广义函数，而且由分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)dx ,\forall\ \varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}) ,$$

这里积分号外的部分消失，是由于 $\varphi(x)$在 $x=\pm\infty$附近恒为0的原故. 仿照这个例子，我们可以给出

定义2.3.6. 广义函数 $f(x)\in\mathscr{D}'(\Omega)$的微商$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j=1, 2, \cdots, n$，仍是 $\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数，定义为

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right\rangle=(-1)\left\langle f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\rangle, \qquad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega) . \tag{27}$$

由此直接有

定理2.3.7. 任何广义函数 $f(x)\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 皆可微分任意多次，而且

$$\langle \partial^\alpha f,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\varphi\rangle,\qquad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{28}$$

两个广义函数一般地不能相乘，但 $a(x)\in C^\infty(\Omega)$ 作为一个广义函数(因为 $a(x)$ 局部可积)却可以乘任一 $u(x)\in\mathscr{D}'(\Omega)$，其定义为

定义2.3.8. $a(x)\in C^\infty(\Omega)$ 称为一个 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 乘子，可以对任一 $u(x)\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 定义乘子运算 $a(x)\cdot:u(x)\mapsto a(x)u(x)\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 如下：

$$\langle au,\varphi\rangle=\langle u,a\varphi\rangle,\qquad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{29}$$

由定义2.3.6和2.3.8可见，任意的 C^∞ 系数微分算子 $P(x,\partial_x)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ 都可以作用到任一 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 广义函数 $u(x)$ 上去，其定义为

$$\langle P(x,\partial_x)u,\varphi\rangle=\langle u,{}^tP(x,\partial_x)\varphi\rangle,\qquad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{30}$$

这里

$${}^tP(x,\partial_x)=\sum(-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha(a_\alpha(x)\cdot) \tag{31}$$

称为 P 的转置算子. 从这里我们可以看到，广义函数的运算都是通过对偶转移到基本空间上来实现的，这可以说是广义函数最基本的原则. 在本章中，我们认为所有广义函数都是"实"的，这是指：当 $\varphi(x)$ 取实值时，$u(\varphi)$ 也是实的，而且 $u(c\varphi)=cu(\varphi)$，c 为实数(见(22)式)，这时 $u(\varphi)$ 常记作 $\langle u,\varphi\rangle$，表示它是 u 与 φ 配对而来，称为欧几里得配对. 在这种配对下，与 P 对偶的算子即转置算子 ${}^tP$. 在下一章中，φ 和 $u(\varphi)$ 都要取复值，而有时需将(22)式改为 $u(c\varphi)=\bar{c}u(\varphi)$，$c$ 是复数. 这时 u 与 φ 的配对称为埃尔米特(Hermite)配对，记作 (u,φ)，而有 $(u,c\varphi)=\bar{c}(u,\varphi)$，但是 $(cu,\varphi)=c(u,\varphi)$. 对于"复"的广义函数，本章中全部结果均适用，唯一需要改变的是乘子运算：$(au,\varphi)=(u,\bar{a}\varphi)$. 这时，与 $P(x,\partial_x)$ 相对偶的算子将是

$$P^*(x,\partial_x)=\sum(-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha(\bar{a}_\alpha(x)\cdot),$$

称为 P 的伴算子.

从这些定义可以看到，广义函数的微分运算实在是十分灵活的. 那么，它包含什么具体内容呢？下面看一些例子.

例1. 赫维赛德(Heaviside)函数

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

这是一个局部可积函数. 这种函数在某一点上的值可以任意改变而无本质影响，所以上面没有规定 $H(0)$ 的值. 按定义，对于 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 有

$$\langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_0^\infty\varphi'(x)dx=\varphi(0).$$

所以

$$H'(x)=\delta(x)\ . \tag{32}$$

由定理2.3.7，$\delta(x)$ 还可以求任意次微商. 当然，我们将得到具有"更高"的奇异性的广义函数，这一点下面还要再讲.

例2. 在 $n(>1)$ 维的情形，$H(x)$ 定义为

$$H(x)=\begin{cases}1\ , & x_i>0\ ,\quad i=1,2,\cdots,n,\\ 0\ , & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$\frac{\partial^n H(x)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=\delta(x)\ .$$

例3. 现在考虑更为一般的情况，如果 $f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，分段连续且有分段连续的(古典意义下的)微商，记为 $[f'(x)]$，而且设 $f(x)$ 在 $x_1<\cdots<x_k$ 有第一类间断点，其跃度分别为 h_1，…，h_k. 于是 $f(x)$ 作为局部可积函数是一个广义函数，而由定理2.3.7应该有广义函数微商，记作 $f'(x)$，另一方面，其古典意义下的微商 $[f'(x)]$ 显然也是局部可积函数，尽管它在有限个点 $\tilde{x}_1$，…，$\tilde{x}_N$ 诸点无意义①，$[f'(x)]$ 也是一个广义函数. 那么，$f'(x)$ 和 $[f'(x)]$ 有什么关系呢？按定义：

$$\langle f'\ ,\varphi\rangle=-\int f(x)\varphi'(x)dx\ ,$$

$$\langle [f']\ ,\varphi\rangle=\int [f'(x)]\varphi(x)dx\ ,$$

我们有

$$\begin{aligned}\langle f'\ ,\varphi\rangle&=-\left(\int_{-\infty}^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\cdots+\int_{x_k}^{+\infty}\right)f(x)\varphi'(x)dx\\ &=-f\varphi\big|_{-\infty}^{x_1}-f\varphi\big|_{x_1}^{x_2}-\cdots-f\varphi\big|_{x_k}^{+\infty}\\ &\quad+\left(\int_{-\infty}^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\cdots+\int_{x_k}^{+\infty}\right)[f'(x)]\varphi(x)dx\\ &=[f(x_1+0)-f(x_1-0)]\varphi(x_1)+\cdots\\ &\quad+[f(x_k+0)-f(x_k-0)]\varphi(x_k)+\int_{-\infty}^{+\infty}[f'(x)]\varphi(x)dx\\ &=\sum_{j=1}^{k}h_j\varphi(x_j)+\int_{-\infty}^{+\infty}[f'(x)]\varphi(x)dx\\ &=\langle\sum_{j=1}^{k}h_j\delta(x-x_j)+[f'(x)]\ ,\varphi(x)\rangle\ .\end{aligned}$$

所以

---

① 若 $[f'(x)]$ 有界，显然 $[f'(x)]$ 在有限区间上可积，若 $[f'(x)]$ 无界，由于 $f(x)$ 只有有第一类间断点，$[f'(x)]$ 在有限区间上的反常积分是收敛的.

$$f' = [f'(x)] + \sum_{j=1}^{k} h_j \delta(x - x_j) . \tag{33}$$

此公式称为跃度公式.

从这个例子来看，在古典意义下在某点不可微的函数，其广义函数微商无非多了一些奇异性. 在高维的情况，(33)式的推广更是具有极重要的意义.

例4. 二维的情况. 设 Ω 是 (x_1, x_2) 平面上的光滑区域，即是说边界 $\partial\Omega$ 是一光滑曲线，$f(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$①，补充定义在 Ω 外 $f(x) \equiv 0$，补充定义后的函数仍记为 $f(x)$，则 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的局部可积函数(在 $\partial\Omega$ 上有固定的跃度)，而且有广义函数微商 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$，仍记 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ 为函数 $f(x)$ 的古典意义下的微商，它是局部可积的，它确定了一个正则广义函数，于是，按定义，对任意 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$，应用格林(Green)公式，

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle \\ &= -\iint_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega} f(x) \varphi(x) dx_2 \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] \varphi \, dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega} f(x) \cos(\boldsymbol{n}, x_1) \varphi(x) dS ,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 表 $\partial\Omega$ 上的外法线单位向量. 就是说，广义函数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 是正则广义函数 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ 与一个奇异广义函数(它对 φ 的配对为第二项)之和，它标志着 f 在 $\partial\Omega$ 上的跃度的作用. 在物理上，它表示集中在 $\partial\Omega$ 的分布(例如电荷、质量等等).

与此相似，若 $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，设 Δ 为拉普拉斯算子，由格林公式(见第六章(6)式)

$$\iint_{\Omega} f(x) \Delta\varphi \, dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \varphi \Delta f \, dx_1 dx_2 + \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} \varphi \right) dS.$$

这可解释如下：若 $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，其零延拓 $\tilde{f}$ 是一广义函数，而且广义函数 Δf 是正则广义函数 $[\Delta f]$ 与两个奇异广义函数(分别相应于 f 及 $\frac{\partial f}{\partial n}$ 在 $\partial\Omega$ 上的跃度)之和. 可见极为重要的格林公式正是跃度公式的推广.

---

① 这里 $C(\overline{\Omega})$ 是指在 Ω 上连续到边界的函数集合，一般地，$C^k(\overline{\Omega})$ 是指包括所有 $\leqslant k$ 阶导数在 Ω 上连续到边界的函数集合，其中连续到边界是指当 $x \in \Omega$，$x \to y (\in \partial\Omega)$ 时，$\partial^\alpha f(x)$ 都有极限 $(\alpha \leqslant k)$，而且若以这些极限作为 $\partial^\alpha f(y)$ 之值，则 $\partial^\alpha f(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续. 注意，我们假设了 $\partial\Omega$ 是光滑曲线，否则，定义会有困难.

上面的几个例子已经足以告诉我们，容许在古典意义下不可微的函数有某种微商，在物理上是非常有利的．但是，广义函数是否又是一种过分空泛的推广呢？下一节中我们会看到，一切广义函数实际上都局部地是某一连续函数的有限阶微商，所以这个推广又不是过于空泛的．

3. **线性变换** 从现在起我们要讲“自变量”变换时广义函数如何变化．从例1已可看到，广义函数其实是积分的一种推广，其运算也可从有关积分的种种运算中得到定义．例如，积分中有以下的变量变换公式：设 A 为一个非奇异的变元变换(也可说 A 的雅可比行列式不等于零)，对于积分

$$\int f(x)\varphi(x)dx\ ,$$

如果我们用 $f(Ax)$ 代替 $f(x)$，则作变量变换 $A: x\mapsto y$，有

$$\begin{aligned}\int f(Ax)\varphi(x)dx &= \int f(y)\varphi(A^{-1}y)\left|\det\frac{\partial x}{\partial y}\right|dy\\ &= \int f(y)\varphi(A^{-1}y)\left|\det\frac{\partial(A^{-1}y)}{\partial y}\right|dy\ .\end{aligned}$$

仿此，我们给出下面的

定义2.3.9. 对于广义函数 $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，以及非奇异变换 $A: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，我们定义 $u(Ax)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 如下：

$$\langle u(Ax)\ ,\ \varphi(x)\rangle = \left\langle u(y)\ ,\ \left|\det\frac{\partial(A^{-1}y)}{\partial y}\right|\varphi(A^{-1}y)\right\rangle\ . \tag{34}$$

这里我们不讨论 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 的情况，是因为 $\varphi(A^{-1}x)\in\mathscr{D}(A^{-1}\Omega)$，而当 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 时，(34) 式右方不一定有定义，除非 $A^{-1}\Omega\subset\Omega$.

特别地，若 A 为一个非奇异的线性变换，则 $\left|\det\frac{\partial(A^{-1}y)}{\partial y}\right| = |\det A|^{-1}$ 为常数.

下面是一些常用的情况.

例 1. 对称变换 $A: x\mapsto -x$. 这时 $\det A=(-1)^n$，记 $u(-x)=\check{u}(x)$ 而(34)式成为

$$\begin{aligned}\langle\check{u}(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle &= \langle u(-x)\ ,\ \varphi(x)\rangle\\ &= \langle u(x)\ ,\ \varphi(-x)\rangle = \langle u\ ,\ \check{\varphi}\rangle\ .\end{aligned}$$

例 2. 相似变换 $A: x\mapsto\lambda x$，$\lambda>0$. 这时

$$\langle u(\lambda x)\ ,\ \varphi(x)\rangle = \lambda^{-n}\langle u(x)\ ,\ \varphi(\lambda^{-1}x)\rangle\ .$$

特别是，若 $u(\lambda x)=\lambda^k u(x)$，称 u 为 k 次正齐性广义函数，而上式成为

$$\langle u(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle = \lambda^{-k-n}\langle u(x)\ ,\ \varphi(\lambda^{-1}x)\rangle\ .$$

例如 $\delta(x)$ 就是一个 $-n$ 次的正齐性广义函数.

齐性广义函数是齐性函数的推广. 若是限制了 $\lambda>0$，我们称之为正齐次

性，在现代偏微分方程理论中凡说齐性广义函数必指正齐性. 只要看一下相似变换的几何意义——从原点出发将一个向量按其自身方向放大 λ 倍——就知道这个规定比较自然.

例3. 平移变换 $A: x\mapsto x-h$. 这并不是线性变换，而是一个仿射变换，但是我们仍按定义2.3.9来定义 $u(x-h)$. 因为现在 $A^{-1}: x\mapsto x+h$，$\det A$ 则用此变换的雅可比行列式来代替，于是有

$$\langle u(x-h), \varphi(x)\rangle = \langle u(x), \varphi(x+h)\rangle .$$

我们也常用 τ_h 来记平移算子，即 $\tau_h u(x)=u(x-h)$，则 $\langle \tau_h u, \varphi\rangle = \langle u, \tau_{-h}\varphi\rangle$.

若一个广义函数 u 在变换 A 下不变，即若 $u(x)=u(Ax)$ 我们将称它为 A-不变的. 可以证明：若对任意平移算子 τ_h，$u(x)$ 均为平移不变的则 $u(x)=c$（这是一个局部可积函数，因此是一个广义函数）.

4. **极限运算** 设有一个 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 广义函数序列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，我们有

定义2.3.10. $f_n\to f$（于 $\mathscr{D}'$ 中）即 $f_n\in\mathscr{D}'$ 在 $\mathscr{D}'$ 意义下收敛于 $f\in\mathscr{D}'$，是指对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 均有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle . \tag{35}$$

这种收敛性准确些说应称为“弱 * 收敛”.

同样，一个广义函数级数收敛于一个广义函数 $\sum_{j=1}^{n} f_j = f$ 即指对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 均有

$$\lim_{n\to\infty}\langle \sum_{j=1}^{n} f_j, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle .$$

广义函数收敛性是一个很灵活的概念. 例如我们有

定理2.3.11. 设 $f_n\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 且 $f_n\to f$（于 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中），则对于任意固定的 α 有

$$\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f, \qquad \text{于 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 中}.$$

证 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，则由微商的定义

$$\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle .$$

由假设 $f_n\to f$（于 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中），而 $\partial^\alpha\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，故上式右方之极限是 $(-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle ,$$

而定理得证.

这个定理证明虽简单，却说明问题. 试与数学分析中收敛序列的逐项微商定理比较，定理2.3.11是何等自然而简洁！在古典的数学分析中，微商运算可能把一个序列的收敛性破坏殆尽：$\{f_n\}$ 收敛而 $\{\partial^\alpha f_n\}$ 不一定收敛. 这个

事实时常说成是古典的微商运算的不连续性；而在广义函数理论中，微商运算却一定保持收敛性，这个事实相应地说成是广义函数中微商运算的连续性. 这是多么方便的事实！那么，是怎样获得这样的便利呢？从证明过程看到，我们已把原来作用于 f_n 的 ∂^α 转移到试验函数 φ 上去了，从而使 ∂^α 与 lim 不发生关系，这样绕过了古典数学分析中交换极限次序的重大困难. 这就是对偶性的作用. "对偶性"（分部积分就是它的初等的或古典的形式）正是广义函数本质所在.

不但可以定义广义函数序列的收敛性，也可以定义含参数的广义函数对该参数的收敛性. 例如，古典函数微商的定义是差商的极限. 对于广义函数情况也是如此. 取 h 充分小，令 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$（第 i 个分量为 1，其他为 0），则

$$\langle\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}, \varphi\rangle=\langle f, \frac{\varphi(x-he_i)-\varphi(x)}{h}\rangle .$$

这里若记 $\operatorname{supp}\varphi=K\subset\Omega$，则有 $\operatorname{supp}\varphi(x-he_i)=K_h=\{x+he_i;\ x\in K\}$. 当 h 充分小时，例如当 $h<h_0$ 时，也有 $K_h\subset\Omega$，从而 $\dfrac{\varphi(x-he_i)-\varphi(x)}{h}\in\mathscr{D}(\Omega)$，可见当 h 充分小时，差商的支集均在 $\bigcup\limits_{h<h_0}K_h\subset\Omega$ 中，而且易证：当 $h\to 0$ 时，

$$\frac{\varphi(x-he_i)-\varphi(x)}{h}\to-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\text{于 }\mathscr{D}(\Omega)\text{ 中}),$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\langle\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}, \varphi\rangle\\&=-\langle f(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle\\&=\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\rangle .\end{aligned}$$

因此，在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 收敛意义下，我们有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

即广义微商为其差商在 $\mathscr{D}'$ 意义下的极限.

我们将来还可以证明任一个广义函数都是一串 $C^\infty(\Omega)$ 函数作为广义函数①的极限. 这一事实，物理学家早就在应用，他们用一串 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数的极限来定义 $\delta(x)$，只不过他们当时没有 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中收敛性的概念. 用我们今天

① 每一个 $C^\infty(\Omega)$ 函数都在 Ω 中局部可积，但不一定可积. 因为 Ω 可能无界，即令 Ω 有界，在 $\partial\Omega$ 附近函数可能无界. 熟记这件事很有好处.

关于广义函数的知识来看，他们所建立的各种序列都可说是下面定理的特例.

定理 2.3.12. 设有 $C^\infty(\mathbf{R})$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 适合

(i) 对任意 $M>0$，当 $|a|<M$，$|b|<M$ 时

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx\right| \leqslant c ,$$

c 只与 M 有关；

(ii) 固定 a 和 b 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \begin{cases} 0 , & \text{若 } a, b \text{ 同号}; \\ 1 , & \text{若 } a<0<b, \end{cases}$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x) .$$

证 令

$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi)d\xi .$$

由条件(i)，在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界，而且

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 , & x>0 , \\ 0 , & x<0 , \end{cases}$$

利用著名的关于积分号下取极限的勒贝格控制收敛定理①有

$$\lim_{n\to\infty}\langle F_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int F_n(x)\varphi(x)dx$$

$$=\int H(x)\varphi(x)dx = \langle H , \varphi\rangle , \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}) .$$

特别是

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \langle F_n' , \varphi\rangle = -\langle F_n, \varphi'\rangle \to$$

$$-\langle H , \varphi'\rangle = \langle H' , \varphi\rangle = \langle \delta , \varphi\rangle .$$

因此定理得证.

下面就是物理学家常用以定义 $\delta(x)$ 的一些序列：

例 1. $f_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{n^2x^2+1}$. 它的曲线为图2－4. 很容易看到

$$\int_a^b f_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{d\xi}{\xi^2+1}$$

$$=\frac{1}{\pi}(\arctan nb - \arctan na) .$$

因此，若 a，b 同号，其极限为0；若 $a<0<b$，其极限为1，而且

① 可以参阅任何一本实变函数论教材，未学过实变函数论的读者也可以暂时承认它.

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{\xi^2+1}=1\ .$$

因此，由定理2.3.12得

$$\frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2x^2+1}\to\delta(x)\ .$$

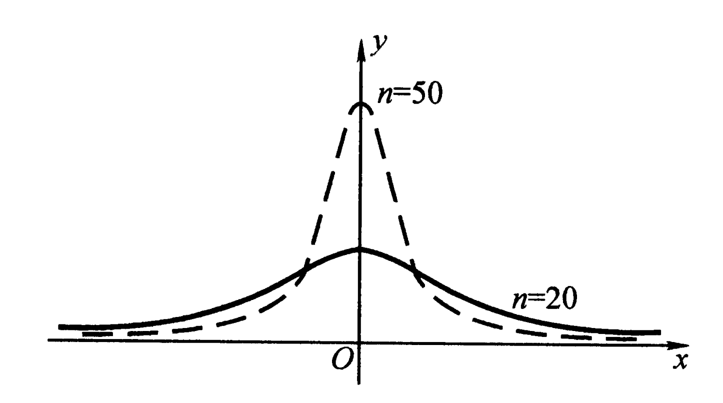


图　2—4

例2.　$f_t(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t},\qquad t>0\ .$

这里我们用 $\dfrac{1}{t}$ 代替 n，上面的定理仍然适用. 我们有

$$\int_a^b f_t(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\frac{b}{2\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy\ .$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}=\sqrt{\pi}$，很容易看到

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b f_t(x)dx=\begin{cases}0\ , & \text{若 } a, b \text{ 同号}\ ,\\ 1\ , & \text{若 } a<0<b\ ,\end{cases}$$

而且

$$\left|\int_a^b f_t(x)dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}f_t(x)dx=1\ .$$

因此，由定理

$$\lim_{t\to 0}f_t(x)=\delta(x)\ .$$

$f_t(x)$ 物理上表示在 $t=0$ 时在原点处单位热源在 $t>0$ 时产生的温度分布. 在研究热传导方程时，它是很有用的，在概率论中它也是很有用的.

例3.　$f_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x}\ .$

利用 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin nx}{x}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=1$，即可很容易看到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}=\delta(x)\ .$$

这个结果在傅里叶级数理论中十分有用.

我们还要介绍广义函数的奇支集 sing supp u 的概念. 上面已说过广义函数在一个开集中的限制是有意义的，又说过广义函数是古典的函数概念的推广. 因此说广义函数 u 在 Ω 的某一开子集 Ω_1 上是 C^∞ 的，即指 u 在 Ω_1 上等于一个 C^∞ 函数 φ，即是$u|_{\Omega_1}=\varphi\in C^\infty$. 这意味着 u 在 Ω_1 上没有奇异性. 取这样的 Ω_1 之最大的(只要取一切这样的 Ω_1 之并就会得到这样的最大的 Ω)，则 u 的奇异性全在其外. 所以我们有

定义 2.3.13.　使 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 等于一个 C^∞ 函数的最大开集 Ω_1 的余集称为 u 之奇支集，记作 sing supp u.

可见 sing supp u 是闭集. 还可见到，sing supp $u\subset$ supp u，因为在 supp u 之外 $u\equiv 0$，而 0 当然是 C^∞ 函数.

例如 $\operatorname{supp} H(x)=[0,+\infty)$，而 $\operatorname{sing\,supp} H(x)=\{0\}$. 还有

$$\operatorname{sing\,supp}\delta(x)=\operatorname{supp}\delta(x)=\{0\}.$$

习　　题

1. 证明 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 广义函数的微商适合

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}.$$

2. 设 $a(x)\in C^\infty(\Omega)$，$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，证明

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(au)=a\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial a}{\partial x_i}u.$$

3. 若广义函数 u 适合 $\check{u}=u$，($\check{u}=-u$)，则称 u 为偶(奇)广义函数. 证明：

(1) $\delta(x)$ 与常值函数 c 皆为偶广义函数.

(2) 偶广义函数之微商是奇广义函数.

(3) 任一广义函数 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 皆可唯一地分解为一个偶广义函数与一个奇广义函数之和如下：

$$u(x)=\frac{1}{2}(u(x)+\check{u}(x))+\frac{1}{2}(u(x)-\check{u}(x)).$$

(4) $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 为偶广义函数当且仅当对任一奇的 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 均有 $\langle u,\varphi\rangle=0$.

4. 证明 $x\delta(x)=0$. 反之，若有广义函数 u 使得 $xu=0$，必有 $u=c\delta(x)$，c 是常数. [提示：(1) 证明 $xu=0$ 当且仅当对于 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 中一切形如 $x\varphi$ 的函数均有 $\langle u,x\varphi\rangle=0$.

(2) 证明上述 u 的支集 $\subset\{0\}$. 因此，若作一个截断函数 $\chi(x)$ 使得在 $x=0$ 附近 $\chi\equiv 1$，则 $u\equiv\chi u$.

(3) 对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$，证明可以找到一个函数 $\varphi_1\in C^\infty(\mathbf{R})$ 使得 $\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi_1(x)$，但 φ_1 一般不属于 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$.

(4) 利用(2)与(3)，证明 $\langle u,\varphi\rangle=\langle\chi u,\varphi\rangle=\langle u,\chi\varphi\rangle=\varphi(0)\langle u,\chi\rangle$

$+\langle u, x\chi\varphi_1\rangle$，由此即得证明.]

5. 在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ 中求解常微分方程 $\frac{du}{dx}=0$，证明它的解必为 $u=c$（c 是任意常数）.

[提示：证明此方程之解必适合 $\langle u, -\varphi'\rangle=0$，$\varphi'\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$. 再证任一函数 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 可写为 $\psi=\varphi'$（$\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 之充分必要条件是 $\int\psi(x)dx=0$. 对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 将它写为 $\varphi=\varphi_1(x)\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)dx+\psi(x)$，证明 $\psi(x)$ 可以写为 $\psi_0'(x)$，$\psi_0'\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$，这里 $\varphi_1(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 且 $\int\varphi_1(x)dx=1$].

6. 若 $f(x)$ 的 k 阶微商只在 $x=x_{kj}$，$j=1,\cdots,n_k$，$k=1,\cdots,m$ 处有第一类间断点，具跃度为 h_{kj}，证明：

$$f^{(m)}(x)=[\varphi^{(m)}]+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}h_{kj}\delta^{(m-k)}(x-x_{kj}).$$

7. 证明：若 $f(x)=H(x)\cos x$，$g(x)=H(x)\sin x$，则

$$f'(x)=\delta(x)-g(x),\quad g'(x)=f(x),$$

因此 g 与 f 分别适合微分方程

$$u''+u=\delta \text{ 与 } u''+u=\delta'.$$

8. 证明：若 $f_n\to f$（在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中），必有 $\partial_x^\alpha f_n\to\partial_x^\alpha f$（在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中）.

9. 令 $f_\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & |x|\geqslant\varepsilon\\ \frac{1}{2\varepsilon} & |x|<\varepsilon\end{cases}$，求当 $\varepsilon\to 0$ 时 $f_\varepsilon(X)$ 的逐点极限与广义函数极限.

10. 令 $f_n(x)=\sin nx$，证明当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)$ 之广义函数极限为 0（这就是傅里叶级数理论中的著名的黎曼－勒贝格引理），但除在 $x=\pm m\pi$（$m=0,1,\cdots$）外，逐点极限不存在.

[提示：参看数学分析教本中关于黎曼－勒贝格引理的证明.]

11. 证明磨光核 $\varphi_\varepsilon(x)$（见 §2 定理 2.2.4）的 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 极限为 $\delta(x)$.

12. 证明：若 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\operatorname{sing\,supp}u\cap\operatorname{supp}\varphi=\varnothing$，则 $\langle u, \varphi\rangle=0$ 及 $\varphi u=0$.

13. 证明：若 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$\varphi\in C^\infty(\Omega)$，$\operatorname{supp}u\cap\operatorname{supp}\varphi=\varnothing$，则 $\varphi u\in C^\infty(\Omega)$.

14. 令 $f_t(x)=\begin{cases}te^{itx}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，则当 $t\to\infty$ 时

$$u_t\to i\delta \quad (\text{于 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 中}).$$

15. 设 $w\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$\int x^\alpha w(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当 } |\alpha|<k,\\ \alpha!, & \text{当 } |\alpha|=k.\end{cases}$$

令 $u_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n-k}w(x/\varepsilon)$. 则当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$u_\varepsilon\to\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha\delta \quad (\text{于 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 中}).$$

§ 4. 一些常用的广义函数

1. **广义函数 x_+^λ 与 x_-^λ**　如果 $f(x)$ 是局部可积的，则它定义一个广义函数，这一点已在上一节中详述了. 如果 $f(x)$ 在例如 $x=0$ 处有不可积的奇点，则积分 $\int f(x)\varphi(x)dx$，$\varphi(x)\in\mathscr{D}(\Omega)$ 不一定有意义. 但若 $f(x)$ 只有 $x=0$ 这一奇点，而接近于 $x=0$ 时 $\varphi(x)\equiv 0$，这个积分仍然有意义. 现在要问，是否可以在 $\varphi(x)$ 于 $x=0$ 附近不恒为 0 时，给上述积分(通常是发散积分)一个定义，使当在 $x=0$ 附近 $\varphi(x)\equiv 0$ 时，这个定义与通常的积分一致? 这个问题称为发散积分的正则化问题. 下面我们就从 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x_+^\lambda$ 开始，这里

$$x_+^\lambda=\begin{cases}x^\lambda, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\tag{36}$$

λ 是一复数. 当 $\mathrm{Re}\lambda>-1$ 时，x_+^λ 是局部可积的，它作为广义函数的定义是自明的，而且当 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 时有

$$\frac{d}{dx}x_+^\lambda=\lambda x_+^{\lambda-1}.\tag{37}$$

事实上，对任意 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$，由分部积分法，

$$\begin{aligned}\langle\frac{d}{dx}x_+^\lambda,\varphi\rangle&=-\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi'(x)dx=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}x^\lambda\varphi'(x)dx\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\varepsilon^\lambda\varphi(\varepsilon)+\lambda\int_\varepsilon^{+\infty}x^{\lambda-1}\varphi(x)dx\right]\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\varepsilon^\lambda\varphi(0)+\lambda\int_\varepsilon^{+\infty}x^{\lambda-1}\varphi(x)dx\right].\end{aligned}\tag{38}$$

因为 $\mathrm{Re}\lambda>0$，上式前一极限为 0，而最后一项极限即为 $\lambda\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}\varphi(x)dx=\langle\lambda x_+^{\lambda-1},\varphi\rangle$ 于是(37)式得证. 当 $\mathrm{Re}\lambda>-1$ 时，$\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi'(x)dx$ 仍有意义，而 $\lambda\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}\varphi(x)dx$ 一般是发散的，$\varepsilon^\lambda\varphi(0)$ 当 $\varepsilon\to0^+$ 时则可能趋于 ∞. 但我们若略去这一项，则不妨以 $-\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi'(x)dx$ 作为 $\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}\varphi(x)dx$ 的定义. 一般地说来，可以考虑

$$I_\varepsilon(\varphi)=\int_{x>\varepsilon}x^\lambda\varphi(x)dx,\tag{39}$$

设 λ 不是整数，取 N 为使 $\mathrm{Re}\lambda+N>-1$ 的最小整数，则由分部积法可得

$$I_\varepsilon(\varphi)=(-1)^N\int_0^{+\infty}\frac{x^{\lambda+N}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+N)}\varphi^{(N)}(x)dx$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}A_j\varphi^{(j)}(0)\varepsilon^{\lambda+j+1}+o(1)\,.$$

系数 A_j 很容易计算. 这里第一项是有限数，而 $\sum_{j=0}^{N-1}*$ 是各阶无穷大量. 所以，我们不妨说，我们已将一个发散积分 $\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}I_\varepsilon(\varphi)$ 分解为一个有限数与 N 个 $\varepsilon^{\lambda+j+1}(j=0,1,\cdots,N-1)$ 阶的无穷大之和. 所以有理由称第一项为发散积分 $\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx$ 的有限部分，记作 $\mathrm{pf}\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx$. 可以证明，将 $I_\varepsilon(\varphi)$ 分解为以上的无穷大量与一个有限数之和的方法是唯一的. 类似于此，对于

$$x_-^\lambda=\begin{cases}0, & x>0\,,\\ |x|^\lambda, & x<0\,.\end{cases}$$

我们也可以定义 $\mathrm{pf}\int_{-\infty}^0|x|^\lambda\varphi(x)dx$. 总之我们定义广义函数 x_+^λ、x_-^λ 如下：对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$，

$$\begin{aligned}\langle x_+^\lambda,\varphi\rangle&=\mathrm{pf}\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx\,,\\ \langle x_-^\lambda,\varphi\rangle&=\mathrm{pf}\int_{-\infty}^0|x|^\lambda\varphi(x)dx\,.\end{aligned}\tag{40}$$

这里有两点应该注意：

(1) 若在 $x=0$ 附近 $\varphi(x)\equiv0$，则 $\mathrm{pf}\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx=\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx$.

(2) $I_\varepsilon(\varphi)$ 的展开式实际与 N 的取法无关，当取更大的 N 而使 $\mathrm{Re}\lambda+N>0$，所得的结果仍是 $\mathrm{pf}\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)dx$. 这实际上就是

$$\frac{d}{dx}x_+^\lambda=\lambda x_+^{\lambda-1},\qquad \lambda\neq0,\,-1,\,-2,\,\cdots\,.\tag{41}$$

这两点留作习题.

2. 柯西积分主部 当 $\lambda=-1,-2,\cdots$ 时，在上述分部积分中将会出现 $\ln\varepsilon$. 例如取 $\lambda=-2$，有

$$\begin{aligned}\int_{x>\varepsilon}x^{-2}\varphi(x)\,dx&=\int_\varepsilon^{+\infty}x^{-1}\varphi'(x)\,dx+\varphi(\varepsilon)\varepsilon^{-1}\\&=-\int_\varepsilon^{+\infty}(\ln x)\varphi''(x)\,dx+\varphi(\varepsilon)\varepsilon^{-1}-\varphi'(\varepsilon)\ln\varepsilon\,.\end{aligned}$$

这时，我们似乎可以取第一项为 $\mathrm{pf}\int_0^{+\infty}x^{-2}\varphi(x)\,dx$，但是实际上我们宁可采用

$$C\varphi'(0)-\int_0^{+\infty}(\ln x)\varphi''(x)\,dx$$

作为 pf $\int_0^{+\infty} x^{-2}\varphi(x)\,dx$，$C$ 的值如何决定见下文．这样的例外是容易想见的，因为若在(41) 式中令 $\lambda=0$，将得到 $\frac{d}{dx}H(x)=0$，而实际上应该是 $\frac{d}{dx}H(x)=\delta(x)$．我们的目的是想尽可能保持(41) 式，而由上例来看，当 $\lambda=0,-1,-2,\cdots$ 时，应该在(41) 式右方出现 $\delta(x)$ 或其微商．事实上，若记

$$
\begin{aligned}
H_{-k\varepsilon}(\varphi) &= \int_\varepsilon^{+\infty} x^{-k}\varphi(x)\,dx \\
&= \frac{1}{k-1}\varepsilon^{-k+1}\varphi(\varepsilon) + \frac{1}{k-1}\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-k+1}\varphi'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{k-1}\varepsilon^{1-k}\varphi(\varepsilon) + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\varepsilon^{2-k}\varphi'(\varepsilon) \\
&\quad + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-k+2}\varphi''(x)\,dx \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-1}\varphi^{(k-1)}(x)\,dx \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(k-j-2)!}{(k-1)!}\varphi^{(j)}(\varepsilon)\varepsilon^{j+1-k} \\
&= -\frac{1}{(k-1)!}\int_\varepsilon^{+\infty}\ln x\cdot\varphi^{(k)}(x)\,dx - \frac{\ln\varepsilon}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(\varepsilon) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(k-j-2)!}{(k-1)!}\varphi^{(j)}(\varepsilon)\varepsilon^{j+1-k},
\end{aligned}
$$

将最后两项中 $\varphi^{(j)}(\varepsilon)$ 与 $\varphi^{(k-1)}(\varepsilon)$ 按 ε 的泰勒公式展开：

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(j)}(\varepsilon) &= \varphi^{(j)}(0) + \varphi^{(j+1)}(0)\varepsilon + \cdots \\
&\quad + \varphi^{(k-1)}(0)\frac{\varepsilon^{k-1-j}}{(k-1-j)!} + o(\varepsilon^{k-j}),
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{\ln\varepsilon}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(\varepsilon) = \frac{\ln\varepsilon}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) + o(1),
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(k-j-2)!}{(k-1)!}\varphi^{(j)}(\varepsilon)\varepsilon^{j+1-k} &= \sum_{j=0}^{k-2}A_j\varphi^{(j)}(0)\varepsilon^{j+1-k} \\
&\quad + \left(\varphi^{(k-1)}(0)\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{k-1-j}\right)/(k-1)! + o(1) \\
&= \sum_{j=0}^{k-2}A_j\varphi^{(j)}(0)\varepsilon^{j+1-k} + \varphi^{(k-1)}(0)\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\right)/(k-1)! + o(1),
\end{aligned}
$$

A_j 是适当的常数，把这些结果代入(42) 式，即知 $\int_\varepsilon^{\infty} x^{-k}\varphi(x)\,dx$ 的奇异部分是

$$\sum_{j=0}^{k-2} A_j \varphi^{(j)}(0)\varepsilon^{j+1-k} - \frac{\ln \varepsilon}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) .$$

略去这个奇异部分即得发散积分的有限部分为：

$$\mathrm{pf}\int_0^{+\infty} x^{-k}\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{+\infty}(\ln x)\varphi^{(k)}(x)\,dx + \varphi^{(k-1)}(0)\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\right)/(k-1)! , \tag{43}$$

这里 $k=2, 3, \cdots$，而当 $k=1$ 时有

$$\mathrm{pf}\int_0^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\,dx = -\int_0^{+\infty}(\ln x)\varphi'(x)\,dx . \tag{44}$$

如果用广义函数的微分关系来表示，则有

$$x_+^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\ln x)_+^{(k)} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)\cdot\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} ,$$

$$x_+^{-1} = -(\ln x)'_+ ,$$

其中

$$(\ln x)_+ = \begin{cases} \ln x, & x>0 , \\ 0, & x<0 . \end{cases}$$

由此可以得到代替(41) 式的

$$\frac{d}{dx}x_+^{-k} = -kx_+^{-k-1} + \frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(x) , k = 0,1,2,\cdots . \tag{45}$$

发散积分的有限部分最早是由法国数学家阿达马提出的. 它实际上是广义函数的来源之一.

我们可以用同样的方法定义 x_-^{-k}.

$$\langle x_-^{-k}, \varphi\rangle = \langle x_+^{-k}, \check{\varphi}\rangle .$$

我们特别要看一下 $x_+^{-1} - x_-^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\langle x_+^{-1} - x_-^{-1}, \varphi\rangle &= \langle x_+^{-1}, \varphi - \check{\varphi}\rangle \\ &= -\int_0^{+\infty}(\ln x)[\varphi'(x) + \varphi'(-x)]dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)\,dx .\end{aligned}$$

因此，若记 $\frac{1}{x} = x_+^{-1} - x_-^{-1}$ (注意，双方均为奇广义函数)，则上式表示

$$\frac{1}{x} = (\ln|x|)' .$$

这是数学分析中熟知的公式，但是它们的解释不同. 因为 $\frac{1}{x}$ 现在是一个广义函数，其定义是

$$\langle \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}[\varphi(x) - \varphi(-x)]\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx .$$

此式最后一项不是通常的广义积分，而是 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ 的柯西主值，记作 $\mathrm{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$，所以我们用它来定义一个广义函数 $\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}$，而有

$$\mathrm{PV}\,\frac{1}{x} = (\ln\,|x|)' . \tag{46}$$

3. **广义函数$\frac{1}{x+i0}$和$\frac{1}{x-i0}$** 它们定义为$\frac{1}{x \pm i\varepsilon}(\varepsilon > 0)$当$\varepsilon \to 0^+$时在$\mathscr{D}'$中的极限，那么这个极限是否存在呢？我们知道，例如

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} = [\ln\,(x+i\varepsilon)]' , \qquad \varepsilon > 0.$$

$\frac{1}{x+i\varepsilon}$ 和 $\ln(x+i\varepsilon)$ 都是局部可积函数，所以上式在古典意义下和广义函数意义下都成立. 由定理 2.3.11 我们知道在 $\mathscr{D}'$ 意义下

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = [\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln(x+i\varepsilon)]' .$$

但是

$$\ln(x+i\varepsilon) = \ln|x+i\varepsilon| + i\arg(x+i\varepsilon) .$$

这里确定复数 $z = x + i\varepsilon$ 的幅角之值的规定是，当 z 从 $\mathrm{Im}\,z > 0$ 处趋于正实值时，$\arg z$ 规定为 0. 因此，当 z 从 $\mathrm{Im}\,z > 0$ 趋于负实值时，其值是 π. 所以

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln(x+i\varepsilon) = \ln|x| + \begin{cases} 0i, & x > 0 \\ \pi i, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \ln|x| + \pi i[1 - H(x)] .$$

于是我们得到$\frac{1}{x+i0}$的定义如下：

$$\frac{1}{x+i0} = (\ln|x|)' - \pi i\delta(x) = \mathrm{PV}\,\frac{1}{x} - \pi i\delta(x) .$$

从这里可以得到一些在物理学中很有用的公式

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) , \tag{47}$$

$$\mathrm{PV}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right) . \tag{48}$$

习　　题

1. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有不可积的奇点，而且可找到一个广义函数 $u(x)$ 使发散积分 $\int f(x)\varphi(x)dx$ 正则化，即使 $\langle u, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$，试证 $u+\sum_{j=0}^{k}c_j\delta^{(j)}(x)$ 也使 $\int f(x)\varphi(x)dx$ 正则化.

2. 证明本节定义的 pf $\int x^\lambda\varphi(x)\,dx$ 当 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 附近恒为 0 时就是通常的积分.

3. 证明：

$$\frac{d}{dx}x_+^\lambda=\lambda x_+^{\lambda-1},\quad x\cdot x_+^\lambda=x_+^{\lambda+1};$$

$$\frac{d}{dx}x_-^\lambda=-\lambda x_-^{\lambda-1},\quad x\cdot x_-^\lambda=-x_-^{\lambda+1}.$$

4. 若记 $|x|^\lambda=x_+^\lambda+x_-^\lambda$，$|x|^\lambda\mathrm{sgn}\,x=x_+^\lambda-x_-^\lambda$，证明它们分别是偶的和奇的广义函数，而且

$$\frac{d}{dx}|x|^\lambda=\lambda|x|^{\lambda-1}\mathrm{sgn}\,x,\qquad \frac{d}{dx}(|x|^\lambda\mathrm{sgn}\,x)=\lambda|x|^{\lambda-1}.$$

5. 若 $\mathrm{Re}\lambda>-n-1$ $(\lambda\neq-1,-2,\cdots,-n)$，证明可定义

$$\begin{aligned}&\mathrm{pf}\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)\,dx\\&=\int_0^1x^\lambda\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx\\&+\int_1^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^{(k-1)}}{(k-1)!(\lambda+k)!}.\end{aligned}$$

它也是 $\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)\,dx$ 的一种正则化.

6. 在 $\mathscr{D}'$ 中求以下的极限

$$\lim_{a\to0^+}\frac{a}{x^2+a^2},\quad \lim_{a\to0^-}\frac{a}{x^2+a^2},$$

并由此证明在数学分析中十分重要的公式：

$$\lim_{y\to0\pm}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\varphi(x)}{x^2+y^2}dx=\pm\pi\varphi(0),\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}).$$

§5. 紧支集广义函数

1. 基本定义　我们要提出一个值得注意的事实：$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 原来是定义为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的泛函，但对于不一定具有紧支集的函数 φ，$\langle u,\varphi\rangle$ 有时也可能是有意义的，只要 $K=\mathrm{supp}\,u\cap\mathrm{supp}\,\varphi$ 为紧集即可．实际上，作一个截断函

数 $\alpha(x) \in C_0^\infty$ 使在 K 上 $\alpha(x)=1$，则有

$$\varphi(x)=\alpha(x)\varphi(x)+(1-\alpha(x))\varphi(x) .$$

第一项 $\alpha\varphi \in \mathscr{D}$，因此$\langle u,\alpha\varphi\rangle$ 有意义. 第二项$(1-\alpha)\varphi$在 $\operatorname{supp} u$ 附近恒为 0. 因为在 $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi$上，$1-\alpha=0$. 在 $\operatorname{supp} u \cap$ ($\operatorname{supp} \varphi$的余集）上 $\varphi=0$，所以

$$\langle u , (1-\alpha)\varphi\rangle = 0 .$$

今定义$\langle u , \varphi\rangle=\langle u , \alpha\varphi\rangle$ 即可将 u 的作用推广到这种 φ上去. 可以证明，这样定义的$\langle u , \varphi\rangle$ 之值与 α 的选取无关，所以这个定义是合理的.

按照这个说明可知，设 $K=\operatorname{supp} u$ 为紧集，$u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，则 u 也可作为 $C^\infty(\Omega)$ 上的线性泛函，它的定义即为$\langle u , \varphi\rangle=\langle u , \alpha\varphi\rangle$，其中 $\alpha(x)$ 为使在 K 上等于 1 的 $C_0^\infty(\Omega)$ 截断函数. 上面已经说过，这个定义与 α 的选取无关. 但是，为使这一线性形式连续，则需定义$C^\infty(\Omega)$ 中的收敛性，即对$C^\infty(\Omega)$ 赋以拓扑，下面的定义给出了这个拓扑.

定义 2.5.1. *空间 $\mathscr{E}(\Omega)$ 是对 $C^\infty(\Omega)$ 空间赋以下面规定的收敛性以后所成的空间：$\varphi_j(x)\to 0$ 于$\mathscr{E}(\Omega)$ 中即在任一紧集 $K\subset\Omega$ 中对任一选定的重指标 α，$\partial^\alpha\varphi_j(x)$ 皆为一致收敛于 0. $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的线性连续泛函之集记作$\mathscr{E}'(\Omega)$，其元即称为 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 广义函数. 这些泛函的连续性（即当 $\varphi_j\to 0$ 于 $\mathscr{E}(\Omega)$ 时，有$\langle u , \varphi_j\rangle\to 0$，$u\in\mathscr{E}'(\Omega)$）等价于下面的形式表述：存在常数$C$，整数 $m\geqslant 0$ 以及紧集 $K\subset\Omega$ 使*

$$|\langle u , \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha\varphi(x)| , \quad \varphi\in\mathscr{E}(\Omega) . \tag{49}$$

关于上述等价性的证明，作为习题.

本节的基本定理即说明 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 广义函数就是具有紧支集的广义函数，即有

定理 2.5.2. $\mathscr{E}'(\Omega)=\{u;\ u\in\mathscr{D}'(\Omega),\ \operatorname{supp} u\subset\subset\Omega\}$.

证 设 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，且 $\operatorname{supp} u$ 为紧，则可取 $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$，且 $\chi(x)=1$ 于 $\operatorname{supp} u$ 的某个邻域上，记 $K=\operatorname{supp}\chi$，对任意 $\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$，由(23)，有

$$\begin{aligned}|\langle u , \varphi\rangle| &= |\langle u , \chi\varphi\rangle| \\ &\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|\partial^\alpha(\chi\varphi)| \\ &\leqslant C'\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|\partial^\alpha\varphi| ,\end{aligned} \tag{50}$$

因此 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$.

反之，若 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$，因此自然地有 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$. 今证 $\operatorname{supp} u$ 为紧. 用反证法. 设 $\operatorname{supp} u$ 非紧，因而无界（紧集即有界闭集，所以 $\operatorname{supp} u$ 非紧时必为无界），所以一定有 $\varphi_j(x)\in\mathscr{E}(\Omega)$，而 $\operatorname{supp}\varphi_j\subset\operatorname{supp} u\cap\{x;\ |x|>j\}$，使

$\langle u, \varphi_j\rangle \neq 0$. 同时，不妨设$\langle u, \varphi_j\rangle = 1$. 但若取任一紧集 $K \subset \Omega$，必有正整数 N 使 $K \subset \{x; |x| \leqslant N\}$. 所以凡 $j > N$ 必有 $\varphi_j \equiv 0$ 于 K 中，即知 $\varphi_j \to 0$ 于 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中，而应有$\langle u, \varphi_j\rangle \to 0$，这与$\langle u,\varphi_j\rangle = 1$ 矛盾. 所以 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 之元必为 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 之元而有紧支集者. 证毕.

由此可知 $\mathscr{E}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. 所以，前面各节中所讲的关于广义函数的运算、性质等等对于 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 之元也都成立. 又 $u_j \to 0$ 于 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 中即对于任意 $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$，皆有 $\langle u_j, \varphi\rangle \to 0$. 但$\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{E}(\Omega)$，所以对任一个 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ 也有$\langle u_j, \varphi\rangle \to 0$. 所以又有 $u_j \to 0$ 于 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中. 所以不但作为一个集合 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 包含于 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中而且$\mathscr{E}'(\Omega)$ 中的极限关系在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中也得以保持(所以前述 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的极限的性质对$\mathscr{E}'(\Omega)$ 依然成立)，这种情况称为$\mathscr{E}'(\Omega)$ 连续嵌入在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中，记作

$$\mathscr{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega). \tag{51}$$

2. **广义函数的局部构造** 前面已经看到，广义函数是局部可积函数(其中包括连续函数)的推广，在这种推广下，对一切连续函数都可以求任意阶微商. 问题在于：这种推广到底能走多远？现在我们试图对它作出一个回答：从本质上说，广义函数无非是连续函数的有限阶微商. 具体地说，我们想要证明下面的定理.

定理 2.5.3. *设 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$\Omega$ 及 Ω_1 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，且 $\Omega_1 \subset\subset \Omega$，则可以找到一个支集在 $\overline{\Omega}_1$ 的某一邻域中的连续函数 f 和整数 $m \geqslant 0$，使得在 Ω_1 上*

$$u = \frac{\partial^{mn} f}{\partial x_1^m \cdots \partial x_n^m}. \tag{52}$$

这个定理的证明需要一些实变函数和泛函分析的知识，所以我们略去不证. 如果读者有兴趣，可以查阅任一本有关广义函数的专书，例如：罗巴斯－尼托著的《广义函数引论》(欧阳光中等译，上海科学技术出版社 1981 年出版）就是一本很好的书.

值得注意的是，由(52) 式可知，若 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ 的支集在 Ω_1 中，则由微商公式

$$\langle u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int f(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx . \tag{53}$$

在本章一开始我们就是由

$$\langle u, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

来引入广义函数的. 现在看到，一般的广义函数由于有(53) 式，比之上式并没有走太远，只不过 f 的选取还与 $\varphi(x)$ 的支集(而不只是 $\varphi(x)$ 本身) 有关. 所以上述定理称为 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的局部构造定理. 粗略地说，$u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 必局部

地是某个连续函数的有限阶微商.

这里再给出一个概念即广义函数的阶：使(23)式成立的最小整数 $k\geqslant 0$ 称为广义函数 l 在 K 中的阶. 如果对任一个 K，阶 k 均为有界的，则称 $\sup\limits_K k$ 为 l 的阶，而且称 l 为有限阶广义函数. 容易看到，$\delta(x)$ 是0阶的. 注意，(53) 中的 $|\alpha|$ 不一定是 u 在 $\overline{\Omega}_1$ 中的阶，而可能略大一些.

再回到 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 广义函数. 由于它们都是有紧支集的，故可取 $\overline{\Omega}_1$ 为 u 的支集，而得

定理 2.5.4. 对 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ 必可找到若干个连续函数 f_α 使在 Ω 上

$$u=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\partial^\alpha f_\alpha(x)\ . \tag{54}$$

这是一个整体构造定理. 由它可以推知，一切 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 广义函数都是有限阶的. 其实，由(50)也可证明 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 是有限阶广义函数.

还有一个有意义的结果：

定理 2.5.5. 若 $\operatorname{supp}u=\{0\}$，则 u 必可表示为 $\delta(x)$ 及其微商的有限线性组合.

证 设 u 的阶数为 $k(<+\infty)$，若 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\Omega$ 为原点的一个邻域，由泰勒公式，

$$\varphi(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)\cdot x^\alpha+\eta(x),$$

其中 $\eta\in C^\infty$ 满足 $\partial^\alpha\eta(0)=0$，$|\alpha|\leqslant k$. 我们可证明 $u(\eta)=0$，于是

$$\begin{aligned}u(\varphi)&=\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\partial^\alpha\varphi(0)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\langle\delta\ ,\partial^\alpha\varphi\rangle\\&=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha\langle\partial^\alpha\delta\ ,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

其中 $a_\alpha=\dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}u(x^\alpha)$，这意味着

$$u=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha\delta^{(\alpha)}.$$

下面证明 $u(\eta)=0$，令 $\chi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，且当 $|x|\leqslant\varepsilon$ 时 $\chi_\varepsilon(x)=1$，当 $|x|\geqslant 3\varepsilon$ 时 $\chi_\varepsilon(x)=0$，则当 $|x|<\varepsilon$ 时，$\eta(1-\chi_\varepsilon)=0$，但 $\operatorname{supp}u=\{0\}$，使得 $\langle u,\eta(1-\chi_\varepsilon)\rangle=0$，所以 $\langle u,\eta\rangle=\langle u\ ,\eta\chi_\varepsilon\rangle$，因此

$$|\langle u\ ,\eta\rangle|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|\partial^\alpha(\eta\chi_\varepsilon)|\ ,$$

按莱布尼茨公式，$\partial^\alpha(\eta\chi_\varepsilon)=\sum\limits_{\alpha'\leqslant\alpha}c\partial^{\alpha-\alpha'}\eta\partial^{\alpha'}\chi_\varepsilon$，且当 $|\alpha|\leqslant k$，$|x|\leqslant 3\varepsilon$ 时，$|\partial^\alpha\chi_\varepsilon(x)|\leqslant C_\alpha\varepsilon^{-|\alpha|}$，$|\partial^\alpha\eta(x)|\leqslant C'_\alpha\varepsilon^{k+1-|\alpha|}$，于是可证得

$$|\langle u\ ,\eta\rangle|\leqslant C'\varepsilon,$$

其中 C' 与 ε 无关($\varepsilon<1$)，由 ε 的任意性可得到 $|\langle u\ ,\eta\rangle|=0$，即 $\langle u\ ,\eta\rangle=0$.

于是定理获证.

习　　题

1. 设 K 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集，$\chi_K(t)$ 为 K 的特征函数，证明 $\chi_K \in \mathscr{E}'(\mathbf{R})$，且它可以表示为一个连续函数的导数.

2. 证明 n 维狄拉克测度 δ 可表示为

$$\delta = \frac{\partial^n H}{\partial x_1 \cdots \partial x_n},$$

这里 H 是 n 维赫维赛德函数.

3. 设 $\varphi_j \to 0$(于 $\mathscr{E}(\Omega)$)，则对任意 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ 有 $\chi\varphi_j \to 0$(于 $\mathscr{D}(\Omega)$)，反之亦成立.

4. 证明 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 连续性等价于不等式(49).

5. 证明 $\partial^p\delta = \delta^{(p)}$ 是一个 $|p|$ 阶广义函数.

第三章　卷　积

§1. 函数与广义函数的卷积

1. 函数与广义函数的卷积　在第二章§2中已经定义了两个连续函数(其中至少一个具有紧支集)的卷积是

$$(f*g)(x)=\int f(y)g(x-y)dy(=\langle f,(\tau_x g)^{\vee}\rangle)$$

$$=\int f(x-y)g(y)dy(=\langle(\tau_x f)^{\vee},g\rangle)$$

$$=(g*f)(x).$$

现在我们可以逐步推广上式来定义广义函数与广义函数的卷积.

定义 3.1.1　若 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$（或 $f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，$g\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$)，则可定义 f 和 g 的卷积为

$$(f*g)(x)=\langle f,(\tau_x g)^{\vee}\rangle=\langle f(\cdot),g(x-\cdot)\rangle.\tag{1}$$

因 $g(y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，对任意固定的 x，$g(x-y)$作为 y 的函数仍是$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$函数，所以(1)是有定义的(对 $f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，$g\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，(1)仍然是有定义的).

例如，对任意的 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，有$(f*\delta)(x)=f(x)$.

引理 3.1.2　设 $\omega\subset\mathbf{R}^m$ 为开集，$\varphi(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\omega)$且有紧集 $K\subset\Omega$ 满足当 $x\overline{\in}K$ 时有 $\varphi(x,y)=0$ 对任意 $y\in\omega$ 成立. 如果$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则函数$y\mapsto\langle u,\varphi(\cdot,y)\rangle$是一 C^∞ 函数，且

$$\partial_y^\alpha\langle u,\varphi(\cdot,y)\rangle=\langle u,\partial_y^\alpha\varphi(\cdot,y)\rangle.\tag{2}$$

证　对固定 $y\in\omega$，$\varphi(\cdot,y)\in C_0^\infty(\Omega)$，它关于 y 的泰勒展开式是

$$\varphi(x,y+h)=\varphi(x,y)+\sum_{j=1}^m h_j\partial_{y_j}\varphi(x,y)+\psi(x,y,h),$$

其中 $\psi(\cdot,y,h)\in C_0^\infty(\Omega)$，且

$$\sup_x|\partial_x^\alpha\psi(x,y,h)|=O(|h|^2),\quad 当 h\to 0,\ \forall\alpha.$$

因为$|\langle u,\psi(\cdot,y,h)\rangle|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_x|\partial_x^\alpha\psi(x,y,h)|$，故$\langle u,\psi(\cdot,y,h)\rangle=O(|h^2|)$. 所以

$$\langle u,\varphi(\cdot,y+h)\rangle=\langle u,\varphi(\cdot,y)\rangle$$

$$+\sum h_j\langle u\ ,\ \partial_{y_j}\varphi(\cdot,y)\rangle+O(|h|^2)\ ,$$

故函数$\langle u\ ,\ \varphi(\cdot\ ,y)\rangle$是可微的，且有

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\langle u\ ,\ \varphi(\cdot,y)\rangle=\langle u\ ,\ \partial_{y_j}\varphi(\cdot,y)\rangle\ ,$$

用归纳法便可证明(2).

定理 3.1.3 若$f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$(或$f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，$\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$)，则

1) $f*\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$；

2) $\operatorname{supp}(f*\varphi)\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}\varphi$； (3)

3) $\partial^\alpha(f*\varphi)=f*\partial^\alpha\varphi=(\partial^\alpha f)*\varphi$. (4)

证 1) 可由引理3.1.2直接推得.

2) 设$x\overline{\in}\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}\varphi$，即不存在$\xi$，使得同时有$\xi\in\operatorname{supp}f$，$x-\xi\in\operatorname{supp}\varphi$，但后式就是$\xi\in\operatorname{supp}((\tau_x\varphi)\check{}\ )$，所以$\operatorname{supp}f\cap\operatorname{supp}((\tau_x\varphi)\check{}\ )=\varnothing$，而由广义函数的支集的定义知，当$\operatorname{supp}f\cap\operatorname{supp}\varphi=\varnothing$，$f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$时$\langle f\ ,\ \varphi\rangle=0$. 于是有

$$(f*\varphi)(x)=\langle f\ ,\ (\tau_x\varphi)\check{}\ \rangle=0\ ,$$

即$x\overline{\in}\operatorname{supp}(f*\varphi)$.

3) 因$(f*\varphi)(x)=\langle f\ ,\ \varphi(x-\cdot)\rangle$，故由引理3.1.2及广义函数的微商的定义可得

$$\partial^\alpha(f*\varphi)(x)=\langle f\ ,\ \partial^\alpha\varphi(x-\cdot)\rangle=\langle\partial^\alpha f\ ,\ \varphi(x-\cdot)\rangle,$$

即3)成立. 由此还可以得到，对任意$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$都有

$$\partial^\alpha(f*\varphi)=(\partial^{\alpha_1}f)*(\partial^{\alpha_2}\varphi)\ .$$

为了证明卷积运算的可结合性，我们需要一个引理.

引理 3.1.4 设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\omega\subset\mathbf{R}^m$为开集，$\varphi\in C_0^\infty(\Omega\times\omega)$且$\operatorname{supp}\varphi\subset K_1\times K_2$，这里$K_1\subset\Omega$，$K_2\subset\omega$为紧集，如果$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则

$$\int\langle u\ ,\ \varphi(\cdot,y)\rangle dy=\langle u\ ,\ \int\varphi(\cdot,y)dy\rangle\ . \tag{5}$$

证 由引理3.1.2知$\langle u\ ,\ \varphi(\cdot,y)\rangle$是光滑函数，且其支集含于$K_2$，所以是可积的. 为简便计可扩展$K_2$为$m$维正方体$\tilde{K}_2$，则积分可取在$\tilde{K}_2$上. 等分$\tilde{K}_2$为边长为$h$的小正方体，可作黎曼和

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^m}\langle u\ ,\ \varphi(\cdot,kh)\rangle h^m=\langle u\ ,\ \sum_{k\in\mathbf{Z}^m}\varphi(\cdot,kh)h^m\rangle,$$

令$h\to0$，则一方面$\sum\langle u\ ,\ \varphi(\cdot,kh)\rangle h^m\to\int\langle u\ ,\ \varphi(\cdot,y)\rangle dy$. 另一方面

$$\psi_h(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^m}\varphi(\cdot,kh)h^m\to\int\varphi(x,y)dy\ ,$$

不但如此，还可证明这里的收敛性是$\mathscr{D}(\Omega)$中的收敛性. 这首先是因为$\operatorname{supp}\psi_h$及$\operatorname{supp}\int\varphi(x,y)dy$都包含在$K_1$内，$\varphi(x,y)$在$K_1\times K_2$上是一致连续的，因此，上式的收敛性关于$x$是一致的，此外对任意重指标$\alpha$又可证明当$h\to 0$时，对$x\in K_1$一致地有

$$\partial^\alpha\psi_h(x)\to\int\partial_x^\alpha\varphi(x,y)dy\ .$$

于是知道上式是$\mathscr{D}(\Omega)$中的收敛性，所以(5)式成立，作为一个习题，请读者详细写出这个证明.

定理3.1.5 若$\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，且$f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. 则

$$(f*\psi)*\varphi=f*(\psi*\varphi)\ . \tag{6}$$

证 $f*\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，$\psi*\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，

$$\begin{aligned}((f*\psi)*\varphi)(x)&=\int\langle f(\cdot)\ ,\ \psi(z-\cdot)\rangle\varphi(x-z)dz\\&=\langle f(\cdot)\ ,\ \int\psi(z-\cdot)\varphi(x-z)dz\rangle\\&=\langle f(\cdot)\ ,\ \int\psi(x-u-\cdot)\varphi(u)du\rangle\\&=\langle f(\cdot)\ ,\ (\psi*\varphi)(x-\cdot)\rangle\\&=(f*(\psi*\varphi))(x)\ .\end{aligned}$$

2. **广义函数的正则化** 前章中就广义函数的构造定理指出，广义函数并不是经典函数概念的漫无边际的推广. 因为每一个广义函数局部地都是某连续函数的有限阶微商. 现在还可以进一步证明每一个广义函数都可以用光滑函数去逼近，其方法就是第一章讲的磨光技巧，就是用磨光核去作卷积. 这里我们再提醒一下，磨光核就是一个函数$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，$\varphi\geqslant 0$而且$\int\varphi(x)dx=1$. 我们常记$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，则有$\int\varphi_\varepsilon(x)dx=1$，而且当$\varepsilon\to 0$时，$\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(x)\to\{0\}$.

定理3.1.6 任一广义函数皆可用$C^\infty(\mathbf{R}^n)$函数在$\mathscr{D}'$意义下逼近.

证 任取磨光核$\varphi_\varepsilon(x)$，则对$S\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，由定理3.1.3，$(S*\varphi_\varepsilon)(x)=\langle S(\cdot)\ ,\ \varphi_\varepsilon(x-\cdot)\rangle\in C^\infty(\mathbf{R})$，今证$S*\varphi_\varepsilon\to S$（于$\mathscr{D}'$中）. 为此任取$\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. 注意到对任一广义函数$T\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$，

$$(T*\psi)(0)=\langle T(\cdot)\ ,\ \psi(-\cdot)\rangle=\langle T\ ,\ \check{\psi}\ \rangle\ .$$

所以$\langle S*\varphi_\varepsilon,\psi\rangle=((S*\varphi_\varepsilon)*\check{\psi})(0)=(S*(\varphi_\varepsilon*\check{\psi}))(0)=\langle S\ ,\ (\varphi_\varepsilon*\check{\psi})^\vee\rangle=\langle S\ ,\ \check{\varphi}_\varepsilon*\psi\rangle$. 注意，这里我们应用了定理3.1.5(卷积的结合律)及等式$(f*\varphi)^\vee=\check{f}*\check{\varphi}$（请读者作为习题自己证明），考虑到

$\check{\varphi}_\varepsilon$ 和 φ_ε 一样也是磨光核，所以可知 $\check{\varphi}_\varepsilon * \psi \to \psi$(于 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中)，从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle S * \varphi_\varepsilon, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle S, \check{\varphi}_\varepsilon * \psi\rangle = \langle S, \psi\rangle .$$

即是说 $S * \varphi_\varepsilon \to S$.

这个定理可以进一步改善为：每一个广义函数都可用 $\mathscr{D}(\Omega)$ 函数去逼近. 这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是任意开集.

定理3.1.7 若 $S\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则必可找到一串 $S_j\in\mathscr{D}(\Omega)$，$j=1, 2, \cdots$，使得

$$S_j \to S(\text{于 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 中}).$$

证 证明的关键是用一串适当的截断函数去“剪裁”S. 为此作一串开集 $\Omega_j\subset\Omega$：

$$\Omega_j = \{x;\ x\in\Omega \text{ 而且满足 } |x| < j \text{ 及 } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\},$$

当然 $\Omega_1\subset\subset\Omega_2\subset\subset\cdots$，而且 $\bigcup_j \Omega_j=\Omega$，这种情况我们常说是开集序列 $\{\Omega_j\}$ 上升地穷竭于 Ω. 作一串截断函数 χ_j 使 $\operatorname{supp}\chi_j\subset\Omega_{j+1}$ 而在 $\overline{\Omega}_j$ 的一邻域上 $\chi_j=1$. 于是对 Ω 的任一个紧子集 K，只要取 j 充分大，必可使 $K\subset\Omega_j$，从而 $\chi_j=1$ 于 K 上. 请注意，这种作法是十分常见的.

于是再像上面一样作磨光核 $\varphi_{1/j}$，其中 φ 满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset\{x;\ |x|\leqslant 1\}$. 故当 $x\in\operatorname{supp}\varphi_{1/j}$ 时，有 $|x|\leqslant\frac{1}{j}$，从而

$$\operatorname{supp}\varphi_{1/j} + \operatorname{supp}\chi_{j-1} \subset \overline{B}_{1/j} + \Omega_j \subset \Omega .$$

$\chi_{j-1}S\in\mathscr{E}'(\Omega)$，我们作

$$S_j = (\chi_{j-1}S) * \varphi_{1/j} = \langle(\chi_{j-1}S)(y), \varphi_{1/j}(x-y)\rangle ,$$

很明显 $S_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，而且 $\operatorname{supp}S_j\subset\Omega$，即 $S_j\in\mathscr{D}(\Omega)$. 以下即可如上面的定理3.1.6一样证明 $S_j\to S$(于 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中).

在第二章中我们讲到许多物理学家曾用函数序列的极限去定义 $\delta(x)$. 其实，他们用的都是些磨光核 $\varphi_{1/j}$，因为 $(\chi_{j-1}\delta) * \varphi_{1/j}=\delta * \varphi_{1/j}=\varphi_{1/j}$，现在我们看到，这是一个很具有一般性的程序.

习 题

1. 若 $f(x, y)\in\mathscr{D}(\Omega_x\times\Omega_y)$，证明积分和 $\sum_i f(\xi_i, y)\Delta_i x$ 在 $\mathscr{D}(\Omega_y)$ 中收敛于 $\int f(x, y)dx$.

2. 设 $S\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^1)$，$T\in\mathscr{E}(\mathbf{R}^1)$，我们定义 S 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}_S(\lambda) = \langle S(\cdot) \ , e^{-\lambda \cdot} \rangle \ ,$$

证明 $S * T$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}_{S*T}(\lambda) = \mathscr{L}_S(\lambda) \cdot \mathscr{L}_T(\lambda) \ .$$

3. 若 $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$g \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，证明

$$(f,g) \to f * g$$

是双线性映射，而且对 f 与 g 分别是连续的.

4. 设 $f \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，$g$ 是一个 m 次多项式，证明 $f * g$ 也是一个 m 次多项式. $f * 1$等于什么？

5. 设 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$，证明可用自然方式定义 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$如下：

$$\langle u \ , \varphi \rangle = \int \langle u(\cdot) \ , \varphi(\cdot, x_2, \cdots, x_n) \rangle dx_2 \cdots dx_n, \quad \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n) \ .$$

§2 广义函数的卷积

1. 两个广义函数卷积的定义 首先说明一下，广义函数作为 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的泛函，即 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，则对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，$\langle u \ , \varphi \rangle$确定为一实数(或复数)，且若 u_1，$u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，使$\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$，则 $u_1 = u_2$. 但我们还可以用卷积给出 $u_1 = u_2$的另一种条件. 利用定义3.1.1知道对于 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，

$$\langle u \ , \varphi \rangle = (u * \check{\varphi})(0) \ . \tag{7}$$

所以对于 u_1，$u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，可从等式

$$u_1 * \varphi = u_2 * \varphi, \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

推出 $u_1 = u_2$.

两个广义函数卷积的定义，可由 $\mathscr{D}'$广义函数与 C_0^∞函数卷积定义推广而得. 如果 $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$g$，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，则由定义3.1.1及定理3.1.5知

$$\begin{aligned}
\langle (f * g) \ , \varphi \rangle &= ((f * g) * \check{\varphi})(0) \\
&= (f * (g * \check{\varphi}))(0) \\
&= \langle f \ , (g * \check{\varphi} \ )\check{} \ \rangle \\
&= \langle f(\cdot) \ , (\int g(y) \varphi(y - \cdot) dy)\check{} \ \rangle \\
&= \langle f(\cdot) \ , \int g(y) \varphi(y + \cdot) dy) \rangle \\
&= \langle f(\cdot) \ , \langle g(y) \ , \varphi(y + \cdot) \rangle \rangle \ .
\end{aligned}$$

但是此式右方即使 g 不是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$函数也可以有定义. 于是，我们可利用这

一点定义两个广义函数卷积如下：

定义3.2.1　设 $f\in\mathscr{D}'$，$g\in\mathscr{E}'$. 则可定义 f 和 g 的卷积 $f*g\in\mathscr{D}'$为：

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle,\ \forall\ \varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n).\tag{8}$$

现在我们要说明定义3.2.1之合理性，即证明(8)右方确实定义了 $\varphi\in\mathscr{D}$ 的一个连续线性泛函. 由定义3.1.1知 $\psi(x)=\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle=(g*\check{\varphi})(-x)$，由定理3.1.3知 $(g*\check{\varphi})(-x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，因此(8)右端有意义，且显然 $\langle f*g,\varphi\rangle$ 关于 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是线性的，若 $\varphi_j\to0$（于 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中），即 $\operatorname{supp}\varphi_j\subset K$（紧集），且 φ_j 在 K 上一致地收敛于0，记 $\psi_j(x)=(g*\varphi_j)(-x)$，则由定理3.1.3

$$\operatorname{supp}\psi_j\subset K+\operatorname{supp}g,$$

故 $\psi_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 很容易证明对一切重指标 α，有 $\partial^\alpha\psi_j(x)$ 关于 x 一致收敛于0. 即 $\psi_j(x)=\langle g(y),\varphi_j(x+y)\rangle\to0$　（于 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中）. 因此 $\langle f(x),\psi_j(x)\rangle\to0$，即有

$$\langle f*g,\varphi_j\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi_j(x+y)\rangle\rangle\to0.$$

这就证明了 $f*g$ 是 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$上的连续线性泛函，即 $f*g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

类似地，当 $f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，$g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$时，用(8)仍可以定义 $f*g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

总之要注意，f 与 g 中至少有一个有紧支集. 对两个一般的 $f,g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$不能一般地定义其卷积，但在有些特定情况下，$f*g$ 仍有定义.

2. 广义函数卷积的性质. 卷积代数

定理3.2.2.　设 $f,g,h\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，且其中至少有两个具紧支集，则

1)　$(f*g)*h=f*(g*h)$；　(9)

2)　$f*g=g*f$；　(10)

3)　$\operatorname{supp}(f*g)\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g$；　(11)

4)　$f*\delta=\delta*f=f$；　(12)

5)　$\partial^\alpha(f*g)=(\partial^{\alpha_1}f)*(\partial^{\alpha_2}g),\qquad\forall\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2$；　(13)

6) 卷积运算关于每个因子是线性的(作为习题).

证　1) 对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}\langle f*(g*h),\varphi\rangle&=\langle f(x),\langle(g*h)(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle\\&=\langle f(x),\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x+y+z)\rangle\rangle\rangle\\&=\langle(f*g)(x),\langle h(z),\varphi(x+z)\rangle\rangle\\&=\langle(f*g)*h,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

这里等式每一步都用到(8)或定理3.1.3的1)，2). 由它们可得 $\langle h(z),\varphi(x+$

$y+z)\rangle\in C^\infty$（当 $h\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 时），或 $\langle h(z),\varphi(x+y+z)\rangle\in C_0^\infty$（当 $h\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 时）.

2) 对于任意 $\varphi,\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，由(6)及连续函数卷积的可交换性与1)，有

$$\begin{aligned}((f*g)*\varphi)*\psi &= (f*g)*(\varphi*\psi)=(f*g)*(\psi*\varphi)\\ &=((f*g)*\psi)*\varphi=(f*(g*\psi))*\varphi\\ &=f*((g*\psi)*\varphi)=f*(\varphi*(g*\psi))\\ &=(f*\varphi)*(g*\psi)=(g*\psi)*(f*\varphi)\\ &=g*(\psi*(f*\varphi))=g*((f*\varphi)*\psi)\\ &=(g*f)*(\varphi*\psi)=((g*f)*\varphi)*\psi,\end{aligned}$$

于是有

$$(f*g)*\varphi=(g*f)*\varphi.$$

所以 $f*g=g*f$.

3)对任意其支集包含在 $\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g$ 的余集中的 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，它满足 $\operatorname{supp}\varphi\cap(\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g)=\varnothing$，于是有 $\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle=0$（事实上，对 $x\in\operatorname{supp}f$，或者 $y\in\operatorname{supp}g$，有 $\varphi(x+y)=0$，或者 $y\overline{\in}\operatorname{supp}g$，都可得 $\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle=0$）. 因此 $f*g$ 在 $\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g$ 的余集上为零. 所以

$$\operatorname{supp}f*g\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g.$$

4) 对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\langle f*\delta,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle\delta(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle=\langle f,\varphi\rangle$$

即 $f*\delta=f$，由2)知 $\delta*f=f*\delta=f$.

5) 对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，应用广义函数微商的定义及引理3.1.2可得

$$\begin{aligned}\langle\partial^\alpha(f*g),\varphi\rangle &=(-1)^{|\alpha|}\langle f*g,\partial^\alpha\varphi\rangle\\ &=(-1)^{|\alpha|}\langle f(x),\langle g(y),\partial^\alpha\varphi(x+y)\rangle\rangle\\ &=(-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),(-1)^{|\alpha_2|}\langle g(y),\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x+y)\rangle\rangle\\ &=(-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),\langle\partial^{\alpha_2}g(y),\partial_x^{\alpha_1}\varphi(x+y)\rangle\rangle\\ &=(-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),\partial_x^{\alpha_1}\langle\partial^{\alpha_2}g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle\\ &=\langle\partial^{\alpha_1}f(x),\langle\partial^{\alpha_2}g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle\\ &=\langle(\partial^{\alpha_1}f)*(\partial^{\alpha_2}g),\varphi\rangle,\end{aligned}$$

所以5)成立.

6)是显然的.

上述卷积运算 $*$ 的结合律、交换律及(12)使得广义函数(严格讲是紧支集的)在卷积运算下成为一个有单位元的代数，其单位元为 δ 函数，称其为卷积代数.

有了上述卷积运算 $*$ 的结合律及交换律，则可定义任意 k 个广义函数

$u_1, \cdots, u_k$ 的卷积，只要它们中至少有 $k-1$个是紧支集的即可，即

$$u = u_1 * \cdots * u_k = u_1 * (\cdots(u_{k-1} * u_k)\cdots) .$$

若不规定至少有 $k-1$个是有紧支集的，则结合律是不成立的. 有反例

$$\begin{aligned}(1 * \delta'(x)) * H(x) &= (1 * \delta(x))' * H(x) \\ &= (1)' * H(x) = 0 , \\ 1 * (\delta'(x) * H(x)) &= 1 * (\delta(x) * H(x))' \\ &= 1 * (\delta(x) * H'(x)) \\ &= 1 * (\delta(x) * \delta(x)) \\ &= 1 * \delta(x) = 1 .\end{aligned}$$

对此反例的解释是：1和 $H(x)$都不具有紧支集. 所以前面说，对 $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$不能一般地定义其卷积.

至此可以问：广义函数有没有“通常的”乘法运算，成为函数逐点相乘的自然推广？答案一般是否定的. 这个问题的讨论需要对广义函数的奇性作进一步的分析，即所谓微局部分析.

关于广义函数卷积的奇异性，有

定理3.2.3 设 $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. 且至少一个具紧支集，则

$$\text{sing supp}(u_1 * u_2) \subset \text{sing supp}\, u_1 + \text{sing supp}\, u_2. \tag{14}$$

图 3—1

证 $\forall\, x_0 \overline{\in} \text{sing supp}\, u_1 + \text{sing supp}\, u_2$，则存在 x_0的开邻域U，使得

$$(\text{sing supp}\, u_1 + \text{sing supp}\, u_2) \cap \overline{U} = \varnothing . \tag{15}$$

由(15)可选取 sing supp $u_i (i=1,2)$的邻域 U_i，使得

$$(\overline{U}_1 + \overline{U}_2) \cap \overline{U} = \varnothing , \tag{16}$$

令 $\psi_i \in C_0^\infty(U_i)$，且 $\psi_i |_{\text{sing supp}\, u_i} = 1$，则 $u_i = \psi_i u_i + (1-\psi_i) u_i = v_i + w_i$，因

sing supp $u_i \cap \text{supp}(1-\psi_i)=\varnothing$，故 $w_i \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$．且 v_i 与 w_i 中至少一个为具有紧支集，设 $v_i \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$．于是 $u_1 * u_2 = v_1 * v_2 + v_1 * w_2 + w_1 * v_2 + w_1 * w_2$，由定理3.1.2知 $v_1 * w_2, w_1 * v_2$，$w_1 * w_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$．所以

$$\text{sing supp}(u_1 * u_2) = \text{sing supp}(v_1 * v_2)\ ,$$

而由定理3.2.2之3)知

$$\text{sing supp}(v_1 * v_2) \subset \text{supp}(v_1 * v_2) \subset U_1 + U_2,$$

由(16)得 $\text{sing supp}(v_1 * v_2) \cap U = \varnothing$，所以

$$x_0 \overline{\in}\ \text{sing supp}(v_1 * v_2) = \text{sing supp}(u_1 * u_2)$$

即(14)成立．

3. **例**　由于卷积运算的重要性，下面举一些例子，其中包括经典意义下函数的卷积．这里首先要提到，关于至多有一个不具紧支集的限制在应用问题中时常可以取消．例如设 $f(x)$，$g(x) \in C(\mathbf{R}^1)$的支集在$[0,+\infty)$中，我们仍可定义其卷积为

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int_0^x f(y)g(x-y)dy\ .$$

另一个在数学物理上重要的情况是考虑四维时空 $\mathbf{R}^4$中光锥的内部 $x_4^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 \geqslant 0$中 $x_4 \geqslant 0$处．这称为前向光锥，记作 C_+．若 $u_1 \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$之支集在 C_+中，$u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$之支集在 $x_4 \geqslant 0$处，也还可以定义 $u_1 * u_2$，这时我们仍用(8)，唯一需要的是，当 $y \in \text{supp}\, u_1$，$z \in \text{supp}\, u_2$时，y 与 z 各位于某一紧集中．事实上，若 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，则当 $y+z \in \text{supp}\, \varphi$时，$y_j+z_j$ 必须有界，$j=1, 2, 3, 4$．由于 $z_4 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$，故由 y_4+z_4有界得知 y_4，z_4分别有界．又由于 $y_1^2+y_2^2+y_3^2 \leqslant y_4^2$，所以$|y_j|$，$j=1, 2, 3$，有界，由此，并由 y_j+z_j，$j=1, 2, 3$，有界知 z_j，$j=1, 2, 3$，有界．这样证明了 y 和 z 各位于一紧集中(细节留作一个习题)，从而用(8)式来定义 $u_1 * u_2$有意义．

例1.　令 $H_\lambda^{(\alpha)}(x)=H(x)e^{\lambda x}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$，$\alpha>0$.

$$\begin{aligned}(H_\lambda^{(\alpha)} * H_\lambda^{(\beta)})(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{\lambda(x-y)}e^{\lambda y}dy \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du \quad (\text{令 } y=ux) \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}B(\alpha,\beta) \quad (\text{当 } x>0 \text{ 时}),\end{aligned}$$

由于 $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$，故易证

$$(H_\lambda^{(\alpha)} * H_\lambda^{(\beta)})(x) = H_\lambda^{(\alpha+\beta)}(x)\ .$$

这里还应补证当 $x<0$时上述卷积为0．这里略去．

例2.　令 $G_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$，$\sigma>0$. $G_\sigma(x)$的支集是整个 $\mathbf{R}^1$，但是我们仍可计算其卷积$(G_\sigma*G_\tau)(x)$. 事实上

$$(G_\sigma*G_\tau)(x)=\frac{1}{2\pi\sigma\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2/2\sigma^2}e^{-y^2/2\tau^2}dy$$

$$\doteq\frac{1}{2\pi\sigma\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2\sigma^2+\frac{xy}{\sigma^2}-\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)}dy\ .$$

应用配方法，可将上式中的指数化为

$$-\frac{\sigma^2+\tau^2}{2\sigma^2\tau^2}\left(y-\frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}x\right)^2-\frac{x^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\ ,$$

所以

$$(G_\sigma*G_\tau)(x)=\frac{1}{2\sigma\tau\pi}e^{-x^2/2(\sigma^2+\tau^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\sigma^2+\tau^2}{2\sigma^2\tau^2}\left(y-\frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}x\right)^2}dy\ .$$

再作变换 $u=\dfrac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}{\sigma\tau}\left(y-\dfrac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}x\right)$，上式成为

$$\frac{1}{2\sigma\tau\pi}e^{-x^2/2(\sigma^2+\tau^2)}\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\tau^2)}}e^{-x^2/2(\sigma^2+\tau^2)}$$

$$=G_{|(\sigma,\tau)|}(x)\ .$$

这个结论在概率论中有重要应用.

例3.　考虑 $P_a(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{x^2+a^2}$，$a>0$，我们有

$$(P_a*P_b)(x)=\frac{ab}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-y)^2+a^2}\cdot\frac{1}{y^2+b^2}dy\ .$$

经过计算易得

$$(P_a*P_b)(x)=P_{a+b}(x)\ .$$

习　题

1. 证明若广义函数 u_1，u_2的支集都在前向光锥中，则 u_2*u_2的支集也在前向光锥中.
2. 计算以下的卷积($x\in\mathbf{R}^1$)

$$e^{-|x|}*e^{-|x|},$$

$$e^{-ax^2}*e^{-ax^2},$$

$$xe^{-ax^2}*xe^{-ax^2}.$$

3. 计算[−1,1]的特征函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

的 n 次卷积幂 $(f*)^n=f*f*\cdots*f$（n 个因子），同时计算 $\left(\dfrac{df}{dx}*\right)^n$ 并问如何由后者推出前者？

4. 设 $u,v\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^m)$，$g,h\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}_y^n)$ 而且 u 和 g 具有紧支集，于是 $u*v, g*h$ 皆存在. 证明：

1）可按下式定义 $u\otimes g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}_{x,y}^{m+n})$

$$\langle u\otimes g\ ,\varphi(\cdot,\cdot)\rangle=\langle u(x)\ ,\langle g(y)\ ,\varphi(x,y)\rangle\rangle,\quad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}_{x,y}^{m+n});$$

2）$(u\otimes g)*(v\otimes h)$ 也存在而且

$$(u\otimes g)*(v\otimes h)=(u*v)\otimes(g*h)$$

特别是

$$(u\otimes\delta_y)*(\delta_x\otimes 1_y)=u\otimes 1_y,$$

这里 δ_x，δ_y 及 1_y 分别为 $\mathbf{R}_x^m$，$\mathbf{R}_y^n$ 上的 δ 函数及 $\mathbf{R}_y^n$ 上的取常值1的函数. 若 u 和 h 有紧支集情况又如何？

5. 证明平移算子 τ_h 与卷积乘算子 $u*$（对任意 $u\in\mathscr{E}'$）是可交换的，即

$$\tau_h(u*v)=u*\tau_h v.\qquad \forall\, v\in\mathscr{D}',$$

进而证明：$\tau_h u=\delta(x-h)*u$.

6. 证明卷积映射 $(u,v)\mapsto u*v$ 是双线性的，而且对 u 和 v 分别是连续的.

§3. 物理学中的卷积

卷积在偏微分方程中的应用将在以后各章中时常看到. 卷积在概率论中的作用在本书中已经不可能涉及了. 现在还应指出，卷积在物理学中是极为重要的，下面将以电路为例来讨论这种应用.

电路上各种元件都有三种电学特性，这就是电阻、电感和电容. 例如理想的电容元件是电容器，所以我们可以用电容器来表示电容 C. 同样，我们用线圈来表示电感 L，用电

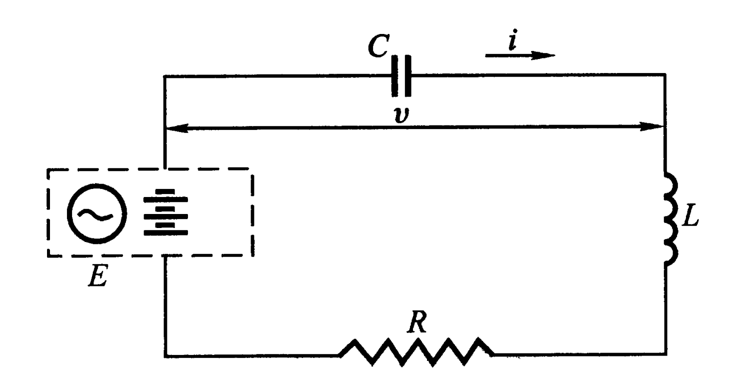


图 3—2

阻器件来表示电阻 R. 例如图3—2就是一个串联的 LRC 电路，其上我们还安置了电源，

它可以是电池组也可以是交变电源，它给出了电动势. 这些参数可以分布在整个线路上. 这时，例如电流 i，电压 v 将是时间 t 和位置 x 的函数. 这种系统称为分布系统，它化为偏微分方程——传输线方程；也可以集中在几个元件上，这时 i 和 v 只是 t 的函数，这称为集中系统，它化为常微分方程. 但是不论何种情况，它服从相同的物理规律. 在没有外电动势($E=0$)时，这些规律是

$$i=-\frac{dq}{dt}, \quad q=Cv, \quad v=L\frac{di}{dt}+Ri, \tag{17}$$

q 为电荷. 消去 i 和 q 可得

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}\right)\frac{dv}{dt}+\left(\frac{1}{LC}\right)v=0. \tag{18}$$

同样，消去 q 和 v 可得

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt}+\left(\frac{1}{LC}\right)i=0. \tag{19}$$

我们假设 i 和 v 当 $t<0$时都为0，而当 $t=0$时，电路得到“启动”而出现了电流 $i(t)$和电压 $v(t)$，故 $\operatorname{supp} i(t)$，$\operatorname{supp} v(t)\subset\{t;\ t\geqslant 0\}$. 例如，在 $t=0$时给电路一个脉冲电流 $i(t)=\delta(t)$，在线路上产生的 $v(t)$并不只在 $t=0$时非0，而在 $t\geqslant 0$时都可能不为0：可能振动，也可能逐步衰减等等，全由线路的特性而定. 如果在电路上“经常地”有电流 $i(t)$，则可以认为它是一连串的脉冲. 这样，例如在时刻 τ 的电流脉冲在 $t\geqslant\tau$ 时会有电压响应. 电路上的电压就是这些响应的叠加. 于是我们得到一个算子 A：

$$v(t)=Ai(\tau), \quad t\geqslant\tau, \tag{20}$$

这个算子当然是线性算子，但不会是微分算子. 因为若它是微分算子，则(20)两侧的 t 与 τ 应该相同，即微分算子应是“无后效”的. 用数学语言来说：微分算子有局部性. 数学上可以证明，有局部性的线性算子也都是微分算子. 那么，A 有什么性质呢？最重要的是，A 是“平移不变的”. 确切些说，因为电路的参数不随时间变化，所以不论在何时刻 τ 启动，经过同样时差 $\Delta\tau=t-\tau$ 而到时刻 t，效果都是一样的. 即是说 A 只依赖于 $t-\tau$：$A=A(t-\tau)$. 数学上又可以证明，凡平移不变算子都是卷积算子，所以(20)式应该是

$$v(t)=(A*i)(t).$$

为了从物理上更清楚地说明它，考虑时刻 τ 的单位脉冲电流 $i(t)=\delta(t-\tau)$，它产生的电压响应——不妨称为单位脉冲响应——设为 $A(t-\tau)$. 但电路上任意电流都可以看作是脉冲电流叠加而成

$$i(t)=\int_0^t i(\tau)\delta(t-\tau)d\tau,$$

由于算子 A 是线性的，所以产生的电压也应为

$$v(t)=\int_0^t i(\tau)A(t-\tau)d\tau. \tag{21}$$

就是说，因为 $i(t)=(\delta*i)(t)$，所以 $v(t)=(A*i)(t)$.

回顾以上，我们看到，刻画电路中 i 与 v 的关系，既可以使用微分算子如(17)，也可以使用卷积算子(21). 也不妨说，常系数线性微分算子之“逆”时常是卷积算子. 这在数学上有深远后果. 它预示了卷积算子在解常系数微分方程时将起多么重大的作用. 不妨说基本解的物理原型已经可以从这里看见.

整个这一节我们并没有严格地证明什么数学定理，也没有系统地讨论过什么物理现象. 我们的目的仅在于为以后的一些数学理论提供一个物理的原型.

第四章　傅里叶变换

§1.　急减函数空间 $\mathscr{S}$ 与缓增广义函数 $\mathscr{S}'$

1. **广义函数与傅里叶变换**　设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上可积，$f(x)$ 的傅里叶变换定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx . \tag{1}$$

这是一个在物理上极为重要的工具. 因为若将 $f(x)$ 看成一个波，众多物理事实表明，一个波可以看成平面波的叠加. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，平面波可以用 $ce^{ix\cdot\xi}$ 来表示，$\xi\cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$，$\xi \in \mathbf{R}^n$ 称为频率向量. $f(x)$ 是由强度不同的平面波叠加起来的. 若相应于频率 ξ 的平面波强度为 $\varphi(\xi)$—— 称为波 $f(x)$ 的频谱，则有

$$f(x) = \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi . \tag{2}$$

问题是已给 $f(x)$ 后如何求 $\varphi(\xi)$. 经典的数学分析证明了在关于 $f(x)$ 很强的条件下 $\varphi(\xi) = (2\pi)^{-n}\hat{f}(\xi)$. 故(1)称为对 $f(x)$ 作频谱分析，(2)称为频谱综合. 如果说 $f(x)$ 可以用来表达一个物理量，它的频谱也可以用来表达同一个物理量：它们是同一个物理对象的两种表象：x 表象和 ξ 表象. 正因为这样，傅里叶变换提供了一种极重要的数学工具. 但是在经典分析的框架中，(1)是不自然的. 因为，为使它收敛，对 $f(x)$ 应加上可积性(黎曼或勒贝格可积)的条件，即令如此，由 $f(x)$ 得出的 $\hat{f}(\xi)$ 或 $\varphi(\xi)$ 按经典的数学分析也不一定可积. 因此难于用(2)由 $\varphi(\xi)$ 回到 $f(x)$. 下面是一个例子. 令

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & |x| > 1 , \\ 1 , & |x| < 1 , \end{cases}$$

则

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\cdot\xi}dx = \frac{2\sin\xi}{\xi} .$$

它在勒贝格意义下是不可积的，而在黎曼意义下非绝对可积((1) 按黎曼意义理解应要求 $f(x)$ 绝对可积). 因此，(2) 的处理是很麻烦的. 总之，经典分析不是讨论傅里叶变换的理想的框架.

我们自然会想到，广义函数的基本思想即对偶性在这里会不会起作用？有一点要注意，因为现在出现了复数，所以代替前面常用的记号$\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$①，我们有时要用$(f, \varphi) = \int f(x)\bar{\varphi}(x)dx$. 它对$f$是线性的，但对$\varphi$却是共轭线性的：

$$(cf, \varphi) = c(f, \varphi), \quad (f, c\varphi) = \bar{c}(f, \varphi), \quad c\text{ 为复数}.$$

现在回到(1)，取$\varphi(\xi) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，将(1)双方乘$\varphi(\xi)$再积分，由交换积分次序有

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \iint e^{-ix\cdot\xi} f(x)\varphi(\xi)dxd\xi = \langle f, \hat{\varphi}\rangle. \tag{3}$$

由于$\varphi(\xi)$有很好的性质，一切运算都是合法的. 于是仿前面的方法，我们说，若有广义函数f与$\hat{f}$使对基本空间中的一切φ，(3)皆成立，就说$\hat{f}$是f的傅里叶变换. 但是这里有一个基本空间选取的问题：取$\varphi\in\mathscr{D}$是不行的，因为$\hat{\varphi}$不再属于$\mathscr{D}$(见§3)，而取$f\in\mathscr{D}'$时(3)式右方不一定有意义. 所以应该找一个基本空间，使其中的元φ经傅里叶变换后仍在此空间中. 然后我们就可以重施故伎，通过对偶性把一切困难都转到基本空间上去. 我们所需要的空间就是$\mathscr{S}$空间.

2. **急减函数空间$\mathscr{S}$及其上的傅里叶变换**

定义 4.1.1. $\mathscr{S}$空间即适合以下条件的$C^\infty(\mathbf{R}^n)$函数$f(x)$的空间：对任意α与β，必有常数$c(\alpha,\beta)\geqslant 0$存在，使

$$\sup_{\mathbf{R}^n}|x^\alpha D^\beta f(x)| \leqslant c(\alpha,\beta). \tag{4}$$

$f_j(x)$在$\mathscr{S}$中趋于0即指对任意固定的α，β

$$\sup_{\mathbf{R}^n}|x^\alpha D^\beta f_j(x)| \to 0. \tag{5}$$

由定义直接可知，$\mathscr{S}$中之元连同其各阶微商在∞处皆以高于任意次多项式倒数的阶趋于0，所以$\mathscr{S}$空间也称为急减函数空间.

由定义直接可以看到，取任意多项式$Q(x)$和常系数偏微分算子$P(D)$，都有

$$Q(x)P(D)\mathscr{S} \subset \mathscr{S},$$

及

$$P(D)Q(x)\mathscr{S} \subset \mathscr{S}.$$

定义 4.1.2. 对$\varphi(x)$，定义其傅里叶变换为

$$\hat{\varphi} = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx. \tag{6}$$

① 今后所作积分，凡不注明积分区域的，皆为在$\mathbf{R}^n$的积分.

由于 $\varphi(x)$ 在 ∞ 处急减，上述积分必然收敛而且可以进行十分灵活的分析运算. 我们有：

定理 4.1.3. 设 $\varphi\in\mathscr{S}$，记其傅里叶变换为 $F:\varphi\mapsto\hat{\varphi}$，则 $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}$，而且

$$F(D^\alpha\varphi)(\xi)=\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi),$$
$$F(x^\alpha\varphi)(\xi)=(-D_\xi)^\alpha\hat{\varphi}(\xi).\tag{7}$$

证 由于 $\varphi(x)$ 急减，我们可以在积分号下求微商，也可以作分部积分而且积分号外之项为 0，所以

$$\int e^{-ix\cdot\xi}D^\alpha\varphi(x)dx=\int[(-D_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}]\varphi(x)dx$$
$$=\int\left[\left(-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\right]\varphi(x)dx$$
$$=\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi).$$

又因为 $x_je^{-ix\cdot\xi}=-D_{\xi_j}e^{-ix\cdot\xi}$，所以

$$\int e^{-ix\cdot\xi}x^\alpha\varphi(x)dx=\int(-D_\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx$$
$$=(-D_\xi)^\alpha\hat{\varphi}(\xi).$$

最后，

$$|\xi^\alpha D_\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi)|=\left|\int e^{-ix\cdot\xi}D_x^\alpha[(-x)^\beta\varphi(x)]dx\right|$$
$$\leqslant\int|(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}(1+|x|^2)^{(n+1)/2}D_x^\alpha[(-x)^\beta\varphi(x)]|dx$$
$$\leqslant C\sup_{\mathbf{R}^n}|(1+|x|^2)^{(n+1)/2}D_x^\alpha[(-x)^\beta\varphi(x)]|<\infty.$$

所以 F 映 $\mathscr{S}$ 中之元到 $\mathscr{S}$ 中，而且由 $\mathscr{S}$ 中趋于 0 的定义，$F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 是连续的，这一点留作习题.

现在已经知道 $F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 是连续线性映射，但实际上，它还是一个线性同构. 即是说，逆映射 F^{-1} 也存在而且也连续，求 F^{-1} 就是反演公式问题. 为此，先需要讨论一个重要函数 —— 高斯函数 —— 的傅里叶变换. 这个函数 $g(x)=e^{-|x|^2/2}$ 的特点是，它的傅里叶变换即其自身(但相差一个常数因子).

引理 4.1.4 $$\int e^{-ix\cdot\xi}e^{-|x|^2/2}dx=(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}.\tag{8}$$

证 因为

$$-ix\cdot\xi-|x|^2/2=-\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2+$$
$$2\sum_{j=1}^n x_j(i\xi_j)+\sum_{j=1}^n(i\xi_j)^2\Big)-\frac{1}{2}|\xi|^2,$$

所以

$$\int e^{-ix\cdot\xi}e^{-|x|^2/2}dx = e^{-|\xi|^2/2}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_j+i\xi_j)^2/2}dx_j.$$

对积分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_j+i\xi_j)^2/2}dx_j$，应用柯西定理来改变积分路径如图 4 — 1，即有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_j+i\xi_j)^2/2}dx_j = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_j^2/2}dx_j = \sqrt{2\pi}\ .$$

于是(8) 得证.

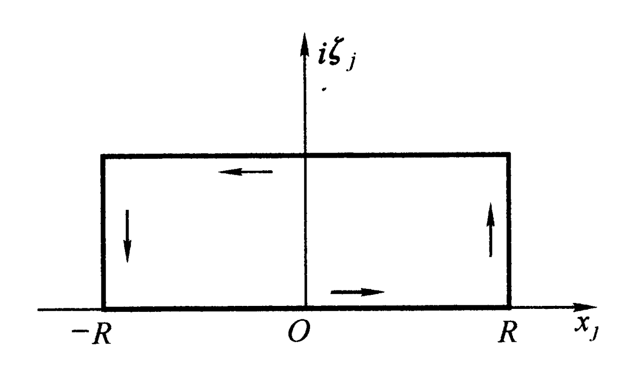


图 4 — 1

定理 4.1.5 F：$\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 有连续的逆映射 F^{-1}：$\hat{\varphi}\mapsto\varphi$，且

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\ . \tag{9}$$

证 取上述高斯函数 $g(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ 有

$$\begin{aligned}\int\hat{\varphi}(\xi)g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi &= \int g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\int\varphi(y)e^{-iy\cdot\xi}dy\\ &= \iint e^{i\xi\cdot(x-y)}g(\xi)\varphi(y)dyd\xi\\ &= \int\varphi(y)dy\int g(\xi)e^{-i(y-x)\cdot\xi}d\xi\\ &= \int\varphi(y)\hat{g}(y-x)dy\\ &= \int\hat{g}(y)\varphi(x+y)dy\ .\end{aligned}$$

用 $g(\varepsilon\xi)(\varepsilon>0)$ 代替 $g(\xi)$，则 $\hat{g}(y)$ 应改为 $\varepsilon^{-n}\hat{g}\left(\dfrac{y}{\varepsilon}\right)$（见下面的(12)式），令 $y=\varepsilon y_1$ 代入上式有

$$\int\hat{\varphi}(\xi)g(\varepsilon\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi = \int\hat{g}(y_1)\varphi(x+\varepsilon y_1)dy_1.$$

令 $\varepsilon\to 0$，即得

$$g(0)\int\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi = \varphi(x)\int\hat{g}(y_1)dy_1 = (2\pi)^n\varphi(x)\ .$$

这里用到了引理 4.1.4 知 $\hat{g}(y_1)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-|y_1|^2/2}$，又 $\int e^{-|y_1|^2/2}dy_1 = (2\pi)^{n/2}$，

所以$\int \hat{g}(y_1)dy_1=(2\pi)^n$. 因为$g(0)=1$，于是定理得证. 在证明过程中多次应用了交换积分次序以及积分号下取极限，由于g，$\hat{g}$，φ，$\hat{\varphi}$都是急减函数，这些运算都是合法的. 这可由读者用数学分析中的定理证明.

下面讨论傅里叶变换的性质，有一些明显的性质作为习题.

1）傅里叶变换与反射：

$$F: \check{\varphi} \mapsto F(\check{\varphi})(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(-x)dx=(2\pi)^n F^{-1}(\varphi) . \tag{10}$$

2）傅里叶变换与平移：

$$F: \tau_h\varphi \mapsto F(\tau_h\varphi)(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x-h)dx=e^{-ih\cdot\xi}F(\varphi)(\xi) . \tag{11}$$

3）傅里叶变换与相似变换：

$$\begin{aligned} F: \varphi(cx) &\mapsto F(\varphi(c\,\cdot))(\xi) \\ &=\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(cx)dx \\ &=|c|^{-n}F(\varphi)\left(\frac{\xi}{c}\right) . \end{aligned} \tag{12}$$

其中$F(\varphi(c\,\cdot))(\xi)$表示先将$\varphi$之自变量乘以$c$再作傅里叶变换，即

$$F(\varphi(c\,\cdot))(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(cx)dx .$$

4）傅里叶变换与非奇异线性变换：设A: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是非奇异线性变换，则由$y=Ax$及$x=A^{-1}y$有

$$\begin{aligned} F: \varphi(Ax) \mapsto F(\varphi(A\,\cdot))(\xi) &=\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(Ax)dx \\ &=\int e^{-i(A^{-1}y)\cdot\xi}\varphi(y)dx \qquad (y=Ax) \\ &=|\det A|^{-1}\int e^{-i\langle y,{}^tA^{-1}\xi\rangle}\varphi(y)dy \\ &=F(\varphi)({}^tA^{-1}\xi)\cdot|\det A|^{-1}. \end{aligned} \tag{13}$$

这里我们用到了线性代数中关于内积记号及双线性形式的一个公式：若线性变换B的表示矩阵为(b_{ij})，则

$$\begin{aligned} (By)\cdot\xi \triangleq \langle By,\xi\rangle &=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}y_i\xi_j \\ &=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}\xi_j\Big)y_i=\langle y,{}^tB\xi\rangle . \end{aligned}$$

5）傅里叶变换与微分运算：傅里叶变换把微分运算变成为乘运算，它也把乘法运算变成为微分运算，即对$f\in\mathscr{S}$及任意重指标α有

$$F(D^\alpha f)(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi) ,$$
$$F(x^\alpha f(x))(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) . \tag{14}$$

最后我们来讨论傅里叶变换与卷积的关系. $\mathscr{S}$ 类的函数虽然不一定有紧支集，但因它们在 ∞ 处是急减的，所以对于 $f, g \in \mathscr{S}$，积分

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x - y) dy$$

仍存在，而且可以在积分号下取任意多次微商：

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g) .$$

不但如此，$f * g$ 仍在 $\mathscr{S}$ 中. 这一点由下面定理立即可知.

定理 4.1.6 若 $f, g \in \mathscr{S}$，则 $f * g \in \mathscr{S}$ 而且

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) . \tag{15}$$

证 $(f * g)\hat{}(\xi)$ 其实是一个逐次积分

$$\int e^{-ix\cdot\xi} dx \int f(y) g(x - y) dy .$$

因为 f, g 都急减，所以另一个逐次积分 $\int f(y) dy \int g(x - y) e^{-ix\cdot\xi} dx$ 是存在的. 因此，由数学分析中的定理，这两个逐次积分相等：

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(\xi) &= \int f(y) dy \int g(x - y) e^{-ix\cdot\xi} dx \\ &= \int f(y) dy \int g(x - y) e^{-i(x-y)\cdot\xi} e^{-iy\cdot\xi} dx \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi} f(y) dy \int g(t) e^{-it\cdot\xi} dt \qquad (t = x - y) \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) .\end{aligned}$$

因为两个 $\mathscr{S}$ 函数之积仍为 $\mathscr{S}$ 函数，所以 $(f * g)\hat{} \in \mathscr{S}$. 又因为傅里叶变换是由 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 的线性同构，所以 $(f * g) \in \mathscr{S}$. 定理得证.

下面我们证明重要的帕塞瓦尔(Parseval) 等式. 这是一个对偶性的关系式，它是定义广义函数的傅里叶变换的基础，因此是极为重要的.

定理 4.1.7 若 $f, g \in \mathscr{S}$，则

$$\langle \hat{f} , g \rangle = \langle f , \hat{g} \rangle , \tag{16}$$
$$(f , g) = (2\pi)^{-n} (\hat{f} , \hat{g}) . \tag{17}$$

证 将绝对收敛的二重积分化为逐次积分有

$$\begin{aligned}\iint f(\xi) g(x) e^{-ix\cdot\xi} dx d\xi &= \int g(x) dx \int e^{-ix\cdot\xi} f(\xi) d\xi \\ &= \int f(\xi) d\xi \int g(x) e^{-ix\cdot\xi} dx .\end{aligned}$$

后两个式子即为 $\langle \hat{f} , g \rangle$ 和 $\langle f , \hat{g} \rangle$.

同样

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{-n}(\hat{f}\ ,\hat{g}\ ) &= (2\pi)^{-n}\iint f(x)\ \overline{\hat{g}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}}dxd\xi \\
&= \int f(x)dx\cdot(2\pi)^{-n}\int\overline{\hat{g}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}}d\xi \\
&= \int f(x)dx\ \overline{(2\pi)^{-n}\int\hat{g}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi} = (f\ ,g)\ .
\end{aligned}
$$

3. 缓增广义函数及其傅里叶变换

定义 4.1.8 $\mathscr{S}$空间上的连续线性泛函称为缓增广义函数，其集记为$\mathscr{S}'$.

这里$u\in\mathscr{S}'$的连续性可以理解为：若$\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{S}$中)，则$u(\varphi_j)\to 0$. 它的必要充分条件是：存在非负整数k,m以及常数$c_{k,m}\geqslant 0$使对一切$\varphi\in\mathscr{S}$有

$$
|u(\varphi)|\leqslant c_{k,m}\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\sup_{\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial_x^\beta\varphi|\ . \tag{18}
$$

我们不在这里证明它了.

$\mathscr{S}'$，$\mathscr{D}'$，$\mathscr{E}'$广义函数的关系如何？先来看$\mathscr{S}$，$\mathscr{D}$，$\mathscr{E}$的关系如何. 作为函数集合，显然有

$$
\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}\ .
$$

然而还不止于此. 例如设$\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{D}$中)，则一切φ_j有共同紧支集，在其外一切$\varphi_j\equiv 0$. 而且对任意β，$\partial_x^\beta\varphi_j$在$\mathbf{R}^n$上一致趋于0. 再给任意$\alpha$，也易见$x^\alpha\partial_x^\beta\varphi_j$在$\mathbf{R}^n$上一致趋于0. 这就是说$\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{S}$中). 所以对$\varphi_j\in\mathscr{D}$，不但有$\varphi_j\in\mathscr{S}$，而且给出了一个连续的嵌入算子$l$：$l\varphi_j=\varphi_j$，但左方的$\varphi_j$认为是$\mathscr{D}$中之元，右方的$\varphi_j$认为是$\mathscr{S}$中之元. 当左方的$\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{D}$中)时，$l\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{S}$中)，所以说嵌入算子$l$：$\mathscr{D}\to\mathscr{S}$是连续的. 同样可以证明嵌入算子$l$：$\mathscr{S}\to\mathscr{E}$也是连续的. 于是把上述包含关系和嵌入算子的连续性综合在一起，记作

$$
\mathscr{D}\hookrightarrow\mathscr{S}\hookrightarrow\mathscr{E}\ . \tag{19}
$$

现在来看广义函数. 显然$\mathscr{E}'$之一切元都是$\mathscr{S}'$之元，$\mathscr{S}'$之一切元都是$\mathscr{D}'$之元，这是(19)式的直接推论. 例如设$u\in\mathscr{S}'$，$\varphi_j\in\mathscr{D}$，则因$\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$，所以$\varphi_j\in\mathscr{S}$，而$u(\varphi_j)$有意义且是线性泛函. 若$\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{D}$中)，则由(19)式也有$\varphi_j\to 0$(于$\mathscr{S}$中)，从而$u(\varphi_j)\to 0$. 这就是说$u$作为$\mathscr{D}$上的线性泛函也是的连续的，所以$u\in\mathscr{D}'$. 亦即$\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$. 同理$\mathscr{E}'\subset\mathscr{D}'$. 此外，若$u_j\in\mathscr{S}'$而且$u_j\to 0$(于$\mathscr{S}'$中)，则对任意$\varphi\in\mathscr{S}$，$u_j(\varphi)\to 0$. 但因$\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$，所以对任意$\varphi\in\mathscr{D}$也有$u_j(\varphi)\to 0$，即是$u_j\to 0$(于$\mathscr{D}'$中). 这就是说，嵌入映射$l$：$\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$也是连续的. 用这样的方法我们证明了：

定理 4.1.9　下面的嵌入成立.

$$\mathscr{E}' \hookrightarrow \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{D}'. \tag{20}$$

由这个定理即知我们前面得到的有关 $\mathscr{D}'$ 之元的性质(如微商、线性变换)皆可移用于此. 但是有一个重要的说明即关于乘子运算. 前面说过，任意 $a(x) \in C^\infty$ 皆是 $\mathscr{D}'$ 乘子. 所以对 $u \in \mathscr{S}'$，au 仍有意义，但一般说来 $au \in \mathscr{D}'$ 而不一定在 $\mathscr{S}'$ 中，所以 a 不一定是 $\mathscr{S}'$ 乘子. 但是，下面的函数类是 $\mathscr{S}'$ 乘子.

令 $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 有以下性质：对任一重指标 α，必有 $c(\alpha) > 0$ 以及整数 $N(\alpha)$ 使

$$|D^\alpha a(x)| \leqslant c(\alpha)(1+|x|^2)^{N(\alpha)}, \tag{21}$$

则对任一 $\varphi \in \mathscr{S}$ 仍有 $a\varphi \in \mathscr{S}$. 所以若 $u \in \mathscr{S}'$，用

$$\langle au, \varphi\rangle = \langle u, a\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

来定义 au，易见 $au \in \mathscr{S}'$. 所以这种 a 是 $\mathscr{S}'$乘子. 这种 a 称为缓增函数，其集记作 $\mathscr{O}_M$. 可以证明，只有 $\mathscr{O}_M$ 之元才能是 $\mathscr{S}'$乘子. 不但如此，我们还可以证明，$u \in \mathscr{S}'$的充分必要条件就是它可以写为 $u=\partial^\alpha[(1+|x|^2)^{m/2}f(x)]$，$f(x)$是有界连续函数. 所以在一定意义上可以说 u 本身也是“缓增”的. 缓增广义函数的名称来源就在于此. 所以例如 $e^{|x|^2}$就不可能是 $\mathscr{S}'$广义函数. 这件事在第七章中要用到，但我们不能证明它了.

现在来讨论 $\mathscr{S}'$的傅里叶变换. 它的基础是帕塞瓦尔等式：对 $f, \varphi_j \in \mathscr{S}$，必有

$$\langle \hat{f}, \varphi_j\rangle = \langle f, \hat{\varphi}_j\rangle.$$

现在若 $f \in \mathscr{S}'$，则上式左方暂时没有意义，但因为当 $\varphi_j \in \mathscr{S}$ 时 $\hat{\varphi}_j \in \mathscr{S}$，所以上式右边有意义. 而且当 $\varphi_j \to 0$(于 $\mathscr{S}$ 中)时，易见 $\hat{\varphi}_j$ 在 $\mathscr{S}$ 中趋于0，所以 $\langle f, \hat{\varphi}_j\rangle \to 0$，即是说上式右边是 $\mathscr{S}$ 上的连续泛函. 它是线性泛函则是自然的. 所以我们可以利用这一点来给出

定义4.1.10　若 $f \in \mathscr{S}'$，则对任意 $\varphi \in \mathscr{S}$，$\langle f, \hat{\varphi}\rangle$定义了一个$\mathscr{S}'$之元，记作 $\hat{f}$并称它为 f 的傅里叶变换. 即有

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}. \tag{22}$$

若仍记傅里叶变换为 $F: \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$，可证这时 F 也是线性同构. 这里只证明 F^{-1}的存在. 为此任给一个 $g \in \mathscr{S}'$，如能证明必有一个 $f \in \mathscr{S}'$使

$$\langle g, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S},$$

则 $g=\hat{f}=Ff$，而 $f=F^{-1}g$. f 的存在是清楚的. 这是因为 $F: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ 是线性同构，所以当 φ 遍取 $\mathscr{S}$ 中一切元时，$F\varphi=\hat{\varphi}$ 也遍取 $\mathscr{S}$ 中一切元. 这样

$\langle g, \varphi\rangle$也是$\hat{\varphi}$的泛函. 很容易证明它也是$\hat{\varphi}$的线性连续泛函，记之为$f$，则有$f\in\mathscr{S}'$而且使得上式成立.

前面讲的关于$\mathscr{S}$函数的傅里叶变换的性质，对$\mathscr{S}'$广义函数都成立(读者可自己证明).

下面我们来举一些$\mathscr{S}'$的傅里叶变换的例子. 它们在物理上都很有用，而且实际上物理学家早就在使用它们了. 成为“用不正确的方法得到正确结果”的突出例子. 现在我们看到，在广义函数框架下，它们都是十分自然的结果. 在介绍这些结果之前我们先需要

定理4.1.11　若$g\in\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'$，则

$$\hat{g}(\xi)=\langle g(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle. \tag{23}$$

并且，它是一个满足估计式(21)的缓增函数.

证　因$g\in\mathscr{E}'$，则$g*\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，这里$\varphi_\varepsilon$是磨光核，且$g*\varphi_\varepsilon\to g$(于$\mathscr{E}'$中)(当$\varepsilon\to 0$时). 从而由$\mathscr{E}'\hookrightarrow\mathscr{S}'$知$g*\varphi_\varepsilon\to g$(于$\mathscr{S}'$中)，于是$F(g*\varphi_\varepsilon)\to F(g)$(于$\mathscr{S}'$中)，而

$$F(g*\varphi_\varepsilon)(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}(g*\varphi_\varepsilon)(x)dx,$$

且$\mathrm{supp}(g*\varphi_\varepsilon)\subset\mathrm{supp}g+\mathrm{supp}\varphi_\varepsilon\subset\mathrm{supp}g+B_1$(取$\varepsilon<1$). 由引理3.1.4，则有

$$F(g*\varphi_\varepsilon)(\xi)=\int\langle g(y), \varphi_\varepsilon(x-y)\rangle e^{-ix\cdot\xi}dx$$

$$=\langle g(y), \int\varphi_\varepsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\rangle.$$

当ξ在任意一紧集K上时，由定理2.2.4知$\int\varphi_\varepsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\to e^{-iy\cdot\xi}$于$\mathscr{D}(\mathbf{R}_y^n)$中(关于$\xi$一致地)，这便得到，当$\varepsilon\to 0$时

$$F(g*\varphi_\varepsilon)(\xi)\to\langle g(y), e^{-iy\cdot\xi}\rangle_y$$

关于$\xi\in K$一致地成立. 于是

$$F(g)(\xi)=\langle g(y), e^{-iy\cdot\xi}\rangle_y.$$

所以，再由引理3.1.2便知$\hat{g}(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，并且，对任一重指标$\alpha$，有

$$D^\alpha\hat{g}(\xi)=\langle g(y), (-y)^\alpha e^{-iy\cdot\xi}\rangle_y.$$

由$g\in\mathscr{E}'$，应用第二章§5估计式(49)，于是可得：存在常数c，整数$m\geqslant 0$以及紧集K，有

$$|D^\alpha\hat{g}(\xi)|\leqslant c\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_{y\in K}|\partial_y^\beta(-y)^\alpha e^{-iy\cdot\xi}|$$

$$\leqslant c\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_{y\in K}\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}c'|(-y)^{\alpha-\beta_1}(-\xi)^{\beta_2}e^{-iy\cdot\xi}|$$

$$\leqslant c(K,m,\alpha)\sum_{|\beta|\leqslant m}(1+|\xi|)^{|\beta|}\leqslant c(g,\alpha)(1+|\xi|)^{m}.$$

此即表明 $\hat{g}(\xi)$ 满足(21)式，所以它是一个缓增函数.

例 1.　$\delta\in\mathscr{E}'$，因此由上面的定理

$$\hat{\delta}(\xi)=\langle\delta(x)\,,\,e^{-ix\cdot\xi}\rangle=1\,.$$

也因此，$F^{-1}(1)=\delta(x)$，这就是许多物理书中的公式

$$(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\,d\xi=\delta(x)$$

的含义.

例 2.　$1\in\mathscr{S}'$，这是显然的，所以由定义

$$\langle\hat{1}\,,\varphi\rangle=\langle 1\,,\hat{\varphi}\rangle=\int\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi=(2\pi)^{n}(2\pi)^{-n}\int e^{i0\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

$$=(2\pi)^{n}\varphi(0)=(2\pi)^{n}\langle\delta\,,\varphi\rangle\,,\qquad\varphi\in\mathscr{S}\,.$$

因此

$$\hat{1}=(2\pi)^{n}\delta(x)\,.$$

例 3.　求 $\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}$ 傅里叶变换. $\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}\in\mathscr{S}'$，因为对于 $\varphi\in\mathscr{S}$，$\mathrm{PV}\int\frac{1}{x}\varphi(x)dx$ 是有意义的. 令

$$f(\xi)=F\left(\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}\right)(\xi)\,,$$

由傅里叶变换的微分性质，

$$D_{\xi}f(\xi)=F\left[(-x)\left(\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}\right)\right].$$

但是 $x\left(\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}\right)=1$，因为对 $\varphi(x)\in\mathscr{S}$，$\langle x\left(\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}\right)\,,\varphi(x)\rangle=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\epsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}dx=\int\varphi(x)dx=\langle 1\,,\varphi\rangle$，所以

$$D_{\xi}f(\xi)=F(-1)=-2\pi\delta(\xi)\,.$$

然而 $\delta(\xi)=H'(\xi)=\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}\,\xi+c]'$. 所以

$$f(\xi)=-i\pi\mathrm{sgn}\,\xi+c\,,\qquad c\text{ 是待定常数}.$$

注意到 $\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}$ 是奇广义函数，它的傅里叶变换也是(这一点留作习题). 但只有当 $c=0$ 时上式右方才是奇广义函数，所以

$$F\left(\mathrm{PV}\,\frac{1}{x}\right)=-\pi i\mathrm{sgn}\,\xi\,.$$

例 4.　$\delta(x,t)$ 的关于 x 的部分傅里叶变换是

$$\langle\delta(x,t)\,,\,e^{-ix\cdot\xi}\rangle_{x}=\delta(t)\,.$$

事实上，$\delta(x,t)$ 可正则化：$\delta(x,t)*\varphi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，其中 $\delta(x,t)*\varphi_\varepsilon\to\delta(x,t)$ 于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ 中，再关于 x 作部分傅里叶变换 $\langle\delta(x,t)*\varphi_\varepsilon,\ e^{-ix\cdot\xi}\rangle\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1}_{\xi,t})$，对任意 $\varphi(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，有

$$\begin{aligned}&\langle\langle\delta(x,t)*\varphi_\varepsilon,\ e^{-ix\cdot\xi}\rangle\ ,\ \varphi(t)\rangle\\ =&\langle\delta(x,t)*\varphi_\varepsilon,\ e^{-x\cdot\xi}\varphi(t)\rangle\\ \to&\langle\delta(x,t)\ ,\ e^{-ix\cdot\xi}\varphi(t)\rangle\\ =&\varphi(0)=\langle\delta(t)\ ,\ \varphi(t)\rangle\qquad(\text{当 }\varepsilon\to 0),\end{aligned}$$

而

$$\langle\langle\delta(x,t)*\varphi_\varepsilon,\ e^{-x\cdot\xi}\rangle\ ,\ \varphi(t)\rangle\to\langle\langle\delta(x,t)\ ,\ e^{-x\cdot\xi}\rangle\ ,\ \varphi(t)\rangle,$$

即有

$$\langle\delta(x,t)\ ,\ e^{-ix\cdot\xi}\rangle_x=\delta(t)\ .$$

和第三章一样，我们可以用那里的(1)或(8)式定义 $\mathscr{S}'$ 广义函数与 $\mathscr{S}$ 函数的卷积，由定理 3.1.3 知它是 C^∞ 的，并且属于 $\mathscr{S}'$. 事实上，若 $f\in\mathscr{S}'$，$g\in\mathscr{S}$，则可定义 $f*g\in\mathscr{S}'$ 如下：

$$\langle f*g\ ,\ \varphi\rangle\triangleq\langle f(x)\ ,\ \langle g(y)\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle\ ,\qquad\forall\,\varphi\in\mathscr{S}\ ,$$

这是因为 $\langle g(y)\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n_x)$（读者可自己证明）. 于是关于它们卷积的傅里叶变换我们有如下定理：

定理 4.1.12 若 $f\in\mathscr{S}'$，$g\in\mathscr{S}$，则 $f*g\in\mathscr{S}'$，其傅里叶变换有

$$F(f*g)=F(f)\cdot F(g)\ .$$

证 首先设 $f\in\mathscr{S}'$，$g\in\mathscr{S}$，对任意 $\psi\in\mathscr{S}$，则

$$\begin{aligned}\langle F(f*g)\ ,\ \psi\rangle&=\langle f*g\ ,\ F(\psi)\rangle\\ &=\langle f(x)\ ,\ \langle g(y)\ ,\ F(\psi)(x+y)\rangle\rangle\\ &=\langle f\ ,\ (g*(F\psi)\check{\ })\check{\ }\rangle\\ &=\langle F^{-1}F(f)\ ,\ (g*(F\psi)\check{\ })\check{\ }\rangle\ ,\end{aligned}$$

注意到(10)，$F^{-1}(\check{u})=(2\pi)^{-n}F(u)$，则

$$\langle F(f*g)\ ,\ \psi\rangle=\langle F(f)\ ,\ (2\pi)^{-n}F(g*(F\psi)\check{\ })\rangle\ .$$

再由定理 4.1.6，有

$$\begin{aligned}\langle F(f*g)\ ,\ \psi\rangle&=\langle F(f)\ ,\ F(g)(2\pi)^{-n}F((F\psi)\check{\ })\rangle\\ &=\langle F(g)\cdot F(f)\ ,\ \psi\rangle\ ,\end{aligned}$$

所以

$$F(f*g)=F(f)F(g)\ .$$

其实，上述结论对两个 $\mathscr{S}'$ 广义函数（其中有一个具紧支集）也是成立的.

定理 4.1.13 若 $f, g \in \mathscr{S}'$，至少有一个有紧支集，则其卷积属于 $\mathscr{S}'$，且其傅里叶变换有

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g) . \tag{24}$$

证 假设 $g \in \mathscr{E}'$，对任意 $\psi \in \mathscr{S}$，由上面定理知 $F(g * \psi) = F(g) \cdot F(\psi)$，而由定理 4.1.11 知 $F(g) \in C^\infty$ 是一缓增函数，因而是 $\mathscr{S}'$ 乘子，由 $F(\psi) \in \mathscr{S}$，则 $F(g * \psi) \in \mathscr{S}$，因而 $g * \psi \in \mathscr{S}$，于是可进行与上述定理类似的论证过程. 在论证过程中只不过把“由定理 4.1.6”改为“由上述结论”. 便可获得定理证明.

习 题

1. 证明 e^{-x^2} 是 $\mathscr{S}$ 函数.

2. 设 $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 适合 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，其支集在 $|x| \leqslant 1$ 中而且 $\alpha(0) = 1$. 又设 $x_j \in \mathbf{R}^n$ 适合 $|x_{j+1}| > 2 + |x_j|$，定义

$$\gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha(x - x_j)}{(1 + |x_j|^2)^j} .$$

证明：

(1) $\operatorname{supp} \alpha(x - x_j)$，$j = 1, 2, \cdots$，互不相交，因此任意一点 x 只是属于至多一项的支集，从而上述级数收敛，而且 $\gamma(x) \in C^\infty$.

(2) 对任意一点 x 必有一个 j 使

$$(1 + |x|^2)^N \partial^p \gamma(x) = (1 + |x|^2)^N \partial^p \alpha(x - x_j)/(1 + |x_j|^2)^j.$$

(3) 将 $(1 + |x_j|^2)^j$ 写为 $(1 + |x_j|^2)^N (1 + |x_j|^2)^{j-N}$，则有

$$(1 + |x|^2)^N/(1 + |x_j|^2)^N \leqslant c , \quad c \text{ 与 } j \text{ 无关}.$$

由此证明 $\gamma(x) \in \mathscr{S}$.

3. 设 $P(\xi)$，$Q(\xi)$ 皆为常系数多项式，证明以下各个命题等价：

(1) $\varphi(x) \in \mathscr{S}$；

(2) 对任意 $P(\xi)$，$Q(\xi)$，$P(x)Q(D)\varphi \in \mathscr{S}$；

(3) 对任意 $P(\xi)$，$Q(\xi)$，$Q(D)[P(x)\varphi(x)] \in \mathscr{S}$.

4. 对于 $\varphi(x) \in \mathscr{S}$ 证明其傅里叶变换有以下性质：

(1) $F(\varphi)(-\xi) = F(\check{\varphi})(\xi) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)(\xi)$ ；

(2) $\tau_h(F(\varphi))(\xi) = \hat{\varphi}(\xi - h) = F(e^{i\langle \cdot, h\rangle}\varphi)(\xi)$ ；

(3) $\hat{\varphi}(c\xi) = |c|^{-n} F\left(\varphi\left(\dfrac{\cdot}{c}\right)\right)(\xi)$ ；

(4) $D_\xi^\alpha F(\varphi)(\xi) = F((-x)^\alpha)(\xi)$,

$$\xi^\alpha F(\varphi)(\xi) = F(D^\alpha \varphi)(\xi) .$$

5. 完成下列对高斯函数 $e^{-x^2/2}$ 的傅里叶变换公式的另一证明.

(1) 令 $C(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ix\cdot\xi}dx$，证明可以在积分号下对 ξ 求微商任意多次，由此得知 $C(\xi)$ 满足常微分方程

$$C'(\xi)=-\xi C(\xi)\ ;$$

(2) 求 $C(0)$，再求 $C(\xi)$.

6. 令 $f(x)=H(x)e^{-ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$，$a>0$，$\alpha>0$，求 $f(x)$ 的傅里叶变换：

$$\int_0^{\infty} e^{-ax-ix\cdot\xi}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx\ .$$

[提示：作变换 $z=(a+i\xi)x$，将积分化为复平面上的半射线 $(0,(a+i\xi)\infty)$ 上积分].

7. 多项式 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathscr{S}'$，求它的傅里叶变换.

8. 已知 $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$，利用 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{S}$ 中的稠密性证明：若 $f\in\mathscr{S}'$ 嵌入在 $\mathscr{D}'$ 中成为 0 元，则在 $\mathscr{S}'$ 中也有 $f=0$，即是说嵌入映射是单射.

9. 证明 $\mathscr{S}'$ 广义函数是有限阶的.

§ 2. 勒贝格空间的傅里叶变换

1. **L^1 函数的傅里叶变换** 在历史上首先是研究了勒贝格可积函数的傅里叶变换，虽然因为这不是一个很好的框架因而许多定理的叙述不甚自然，但其中有许多有意义的很具体的结果，是古典分析中重要的部分. 现在我们将从 $\mathscr{S}'$ 广义函数的傅里叶变换的角度来讨论它. 在本节中我们假定读者已熟悉了勒贝格积分的基本理论，缺少这个准备的读者可略过本节.

我们之所以能从 $\mathscr{S}'$ 广义函数的角度来讨论勒贝格可积函数的傅立叶变换是因为它们是 $\mathscr{S}'$ 广义函数的特例.

定理 4.2.1 $L^p(\mathbf{R}^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，函数都可嵌入在 $\mathscr{S}'$ 空间中.

证 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，任取 $\varphi\in\mathscr{S}$.

当 $1<p<\infty$ 时，用赫德尔(Hölder)不等式有

$$\left|\int f(x)\varphi(x)dx\right|\leqslant\left(\int|f(x)|^pdx\right)^{1/p}\left(\int|\varphi(x)|^qdx\right)^{1/q},$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，从而左方的积分存在. 今证它是 $\mathscr{S}$ 上的连续泛函(线性自明)，这是因为

$$\begin{aligned}\left(\int|\varphi(x)|^qdx\right)^{1/q}&=\left(\int\frac{1}{(1+|x|^2)^{nq}}\left|(1+|x|^2)^n\varphi(x)\right|^qdx\right)^{1/q}\\&\leqslant\sup_{\mathbf{R}^n}\left|(1+|x|^2)^n\varphi(x)\right|\left(\int\frac{dx}{(1+|x|^2)^{nq}}\right)^{1/q}\\&=c\sup_{\mathbf{R}^n}\left|(1+|x|^2)^n\varphi(x)\right|\ ,\end{aligned}$$

从而

$$|\langle f,\varphi\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant c\|f\|_{L^p}\sup_{\mathbf{R}^n}|(1+|x|^2)^n\varphi(x)|\ .$$

当 $p=\infty$ 时，则有

$$|\langle f,\varphi(x)\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant \text{ess sup}|f|\int|\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant \text{ess sup}|f|\sup_{\mathbf{R}^n}|(1+|x|^2)^n\varphi(x)|\int\frac{dx}{(1+|x|^2)^n}\ .$$

当 $p=1$ 的情况. 利用勒贝格控制收敛定理即可证明 $L^1\subset\mathscr{S}'$. 总之，$f\in L^p$ 时，按 $\langle f,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)dx$ 定义了一个 $\mathscr{S}'$ 广义函数. 所以 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 函数都是 $\mathscr{S}'$ 广义函数. 定理得证.

下面讨论 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 的情况. 因为 $f\in L^1$ 是 $\mathscr{S}'$ 广义函数，它的傅里叶变换 $\hat{f}\in\mathscr{S}'$ 应定义如下：

$$\langle\hat{f},\varphi\rangle = \langle f,\hat{\varphi}\rangle = \int f(\xi)\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dxd\xi$$

$$= \int\varphi(x)\int f(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi dx\ ,\qquad \varphi\in\mathscr{S}\ ,$$

所以

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\ . \tag{25}$$

这就是说，L^1 函数的 $\mathscr{S}'$ 意义下的傅里叶变换与其古典意义下的傅立叶变换是一致的.

傅里叶变换 $F:\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$ 是一个同构，但对 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，$\hat{f}(\xi)$ 不一定可积，这一点上节中已有例子说明. $f\in L^1$ 的傅里叶变换有下面性质：

定理4.2.2 若 $f(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则 $\hat{f}(\xi)$ 连续，而且当 $|\xi|\to\infty$ 时，$f(\xi)\to 0$.

证 对任意 $\varepsilon>0$，必有 $N=N(\varepsilon)$ 存在使

$$\int_{|x|\geqslant N}|f(x)|dx<\varepsilon/4\ .$$

$$|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{|x|\geqslant N}|e^{-ix\cdot(\xi+h)}-e^{-ix\cdot\xi}||f(x)|dx$$

$$+\int_{|x|\leqslant N}|e^{-ix\cdot(\xi+h)}-e^{-ix\cdot\xi}||f(x)|dx$$

$$<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\int_{|x|\leqslant N}|e^{-ix\cdot(\xi+h)}-e^{-ix\cdot\xi}||f(x)|dx\ .$$

但是，由中值公式

$$|e^{-ix\cdot(\xi+h)}-e^{-ix\cdot\xi}| = |e^{-ix\cdot\xi}||e^{-ix\cdot h}-e^{-ix\cdot 0}|$$

$$\leqslant|e^{-ix\cdot\theta h}(-ix\cdot h)|\leqslant N\cdot|h| \qquad (0<\theta<1)\ ,$$

所以只要 $|h|<\varepsilon/2N\left(\int|f(x)dx\right)^{-1}$，即有

$$|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}+N|h|\int|f(x)|dx<\varepsilon\ .$$

为证定理后一部分仍用上法有

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant\int_{|x\geqslant N}|f(x)|\,dx+\left|\int_{|x|\leqslant N}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left| \int_{|x|\leqslant N} e^{-ix\cdot\xi)} f(x)dx \right| .$$

在估计后一积分时，用阶梯函数去逼近 $f(x)$. 所谓阶梯函数作法如下：将 $|x| \leqslant N$ 分为有限多个互不相交的长方体 $E_1, \cdots, E_k$ 之并；$\{|x| \leqslant N\} = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$, $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$. 作 E_i 的特征函数 $\chi_{E_i}(x)$：

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i; \\ 0, & x \overline{\in} E_i. \end{cases}$$

所谓阶梯函数即形如 $\sum_{i=1}^{k} A_i \chi_{E_i}(x)$ 的函数. 它们在 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中稠密，所以可以找到一个阶梯函数 $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i \chi_{E_i}(x)$ 使 $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{4}$，这样后一积分可以估计如下：

$$\left| \int_{|x|\leqslant N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \right| \leqslant \int_{|x|\leqslant N} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx + \sum_{i=1}^{k} \left| A_i \int_{E_i} e^{-ix\cdot\xi} dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=1}^{k} \left| A_i \int_{E_i} e^{-ix\cdot\xi} dx \right| .$$

但后一部分当 $|\xi| \to \infty$ 时可以任意小，所以定理得证.

定理的后一部分称为黎曼－勒贝格引理.

若记在 ∞ 处为0的连续函数空间为 $C_\infty(\mathbf{R}^n)$，则我们证明了 $F: L^1(\mathbf{R}^n) \to C_\infty(\mathbf{R}^n)$，但是并非任意 $C_\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数都是某个 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 的傅里叶变换，所以 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中的傅里叶逆变换定理需要有一些修正.

定理 4.2.3. *若 $f(x)$ 及 $\hat{f}(\xi)$ 同属于 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 则有*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi . \tag{26}$$

证 $\mathscr{S}'$ 中的傅里叶逆变换仍可用对偶性来定义. 事实上，因为 F 是 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$，$\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ 的同构，所以在 $\langle f, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{f}, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathscr{S}$, $f \in \mathscr{S}'$ 中，$\hat{f} = g \in \mathscr{S}'$，$\hat{\varphi} = \psi \in \mathscr{S}$ 而 $f = F^{-1}g$, $\varphi = F^{-1}\psi$. 代入上式即有 $\langle F^{-1}g, \psi \rangle = \langle g, F^{-1}\psi \rangle$. 但因 $\psi \in \mathscr{S}$，从而 $(F^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \psi(\xi) d\xi$，又因为已设 $g = \hat{f} \in L^1$，所以

$$\langle F^{-1}g, \psi \rangle = \langle g, F^{-1}\psi \rangle = \int g(x)dx \cdot (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \psi(\xi) d\xi$$

$$= \int \psi(\xi) d\xi \cdot (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} g(x) dx$$

$$= \langle (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} g(x) dx, \psi(\xi) \rangle .$$

因此得到

$$f(x) = (F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi .$$

§1. 中关于 $\mathscr{S}'$ 傅里叶变换的性质皆可移到 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 上来. 但是因为在 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中讨论傅里叶变换时，时常需要设 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$，所以 §1. 中的定理都需要作某些修正，特别要注意的是微分运算问题.

定理 4.2.4. *若 $f(x)$ 及 $x^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leqslant m$, 皆属于 $L^1(\mathbf{R}^n)$，则 $(x^\alpha f(x))^\wedge$ 存在而且*

$(x^\alpha f(x))\hat{\ } = (-D)^\alpha \hat{f}$；若 $f(x)$ 及 $D^\alpha f(x)$，$|\alpha|\leqslant m$ 皆属于 $L^1(\mathbf{R}^n)$，则 $(D^\alpha f)\hat{\ }(\xi)=\xi^\alpha \hat{f}$.

证明只不过是分部积分而已.

但是在 L^1 框架中卷积运算却变得很简单. 这是因为我们有著名的豪斯多夫－杨(Hausdorff-Young)不等式.

定理4.2.5. 若 f，$g\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则

$$h(x)=\int f(t)g(x-t)dt=\int g(t)f(x-t)dt$$

对几乎一切 x 存在，$h(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$，而且

$$\|h\|_{L^1}\leqslant \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}. \tag{27}$$

证 由富比尼(Fubini)定理，因为

$$\int dt\int|f(t)g(x-t)|dt=\int|f(t)|dt\cdot\int|g(x)|dx$$

有意义，故另一个逐次积分 $\int dx\int|f(t)g(x-t)|dt$ 也有意义. 但这就是说 $h(x)$ 对几乎所有 x 有意义，$h(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$，而且

$$\|h\|_{L^1}=\int|h(x)|dx\leqslant\int dx\int|f(t)g(x-t)|dt$$

$$=\int dt\int|f(t)g(x-t)|dx=\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

(27) 就称为豪斯多夫－杨不等式.

定理 4.2.6. 若 f，$g\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则 $f*g\in L^1(\mathbf{R}^n)$，且

$$(f*g)\hat{\ }=\hat{f}\cdot\hat{g}.$$

证 利用富比尼定理

$$(f*g)\hat{\ }(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}(f*g)dx$$

$$=\int e^{-ix\cdot\xi}\int f(t)g(x-t)dtdx$$

$$=\int e^{-it\cdot\xi}f(t)dt\int e^{-i(x-t)\cdot\xi}g(x-t)dx$$

$$=\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi).$$

2. **L^2 函数的傅里叶变换** $L^2(\mathbf{R}^n)$ 也含于 $\mathscr{S}'$ 中，但它同时又是一个希尔伯特(Hilbert)空间. 现在我们想在希尔伯特空间框架里讨论傅里叶变换. 又因为 $\hat{f}(\xi)$ 一般取复值，所以要用复希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R}^n)$，其中的内积定义为

$$(f,g)=\int f(x)\overline{g}(x)dx.$$

$\mathbf{R}^n$ 上的 L^2 函数不同于有界域 Ω 上的 L^2 函数：它们一般地不属于 $L^1(\mathbf{R}^n)$，所以不能用(25)式来定义其傅里叶变换. 但由帕塞瓦尔关系式

$$(f,g)=(2\pi)^{-n}(\hat{f},\hat{g}),\qquad f,g\in\mathscr{S}',$$

如果在 $\mathbf{R}^n_x$ 中用测度 dx，在 $\mathbf{R}^n_\xi$ 中用测度 $đ\xi=(2\pi)^{-n/2}d\xi$，令 $f=g$，则上式形式地可写

成

$$\|f\|_{dx}^2 = \|\hat{f}\|_{d\xi}^2. \tag{28}$$

现设 $f\in L^2$，因为 $\mathscr{S}$ 在 L^2中稠密，所以可以选一串 $f_j\in\mathscr{S}$ 使$\|f_j-f\|_{L^2}\to 0$. 这时 $\hat{f}_j$ 也在 $\mathscr{S}$ 中而对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$ 有

$$\langle f_j, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{f}_j, \varphi\rangle . \tag{29}$$

但由(28)式(这时 $\hat{f}_j\in\mathscr{S}$，因而(28)右方确为 $L^2(\mathbf{R}_\xi^n)$范数)可知，这时 $\hat{f}_j$ 也必在$L^2(\mathbf{R}_\xi^n)$中有一极限 $g(\xi)\in L^2(\mathbf{R}_\xi^n)$，而且$\|\hat{f}_j-g\|_{d\xi}^2\to 0$. 在(29)中取极限有

$$\langle f , \hat{\varphi}\rangle = \langle g , \varphi\rangle ,$$

因此 $g=\hat{f}$. 这就是说 $L^2(\mathbf{R}^n)$函数作为 $\mathscr{S}'$之元，其傅里叶变换 $\hat{f}$ 仍在 $L^2(\mathbf{R}_\xi^n)$中，而且(28)式告诉我们，其范数不变. 这样，我们证明了 F: $L^2(\mathbf{R}^n)\to L^2(\mathbf{R}^n)$是一个等距变换(即保持范数不变从而也保持内积不变的变换). 再看其逆变换. 仿照上面的作法，我们也可以利用关系式

$$\langle F^{-1}g , \psi\rangle = \langle g , F^{-1}\psi\rangle , \qquad g\in\mathscr{S}', \psi\in\mathscr{S}$$

将 F^{-1}拓展为 F^{-1}: $L^2(\mathbf{R}^n)\to L^2(\mathbf{R}^n)$. 因此，若将 $\mathscr{S}'$中的傅里叶变换限制到 $L^2(\mathbf{R}^n)$上，它不仅是等距的，而且是一对一的. 一个希尔伯特空间上的一对一的等距变换称为其上的酉变换. 傅里叶变换是 $L^2(\mathbf{R}^n)$上的酉变换这一事实有重要的物理意义，特别是在量子力学中极其重要.

我们希望给 $L^2(\mathbf{R}^n)$上的傅里叶变换以更具体的形式，设 $f(x)\in L^2(\mathbf{R}^n)$，作$\{|x|\leqslant N\}$的特征函数 $\chi_N(x)$：

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1 , & |x|\leqslant N , \\ 0 , & |x| > N . \end{cases}$$

则 $f_N=\chi_N f\in L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^2(\mathbf{R}^n)$，而且当 $N\to\infty$时，$\|f_N-f\|\to 0$. 因此，由傅里叶变换的等距性也有

$$\|\hat{f}_N-\hat{f}\|\to 0 . \tag{30}$$

但 $f_N\in L^1(\mathbf{R}^n)$，所以它的傅里叶变换可用(25)式表示：

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\chi_N(X)f(x)dx = \int_{|x|\leqslant N} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx .$$

(30)表示 $\hat{f}$ 是 $\hat{f}_N$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$中的极限即平均收敛的极限，所以

$$\hat{f}(\xi) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|x|\leqslant N} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$$

("l. i. m."即平均收敛极限之意). 这个极限时常也写成$\int e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$，所以 $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$的傅里叶变换也常用(25)表示，只不过这时它并不表示一个勒贝格积分，而表示一个勒贝格积分的平均收敛极限，即应理解为下面的(31)式.

概括以上的结果，我们有

定理4.2.7. *若 $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，则作为 $\mathscr{S}'$广义函数，其傅里叶变换 $\hat{f}(\xi)$仍属于 $L^2(\mathbf{R}^n)$，而且*

$$\hat{f}(\xi) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{|x|\leqslant N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \ . \tag{31}$$

F: $L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$是一个酉变换，即有

$$\|f\|_{dx} = \|\hat{f}\|_{d\xi}.$$

F既然在希尔伯特空间保持范数不变当然也保持内积不变，因为

$$(f\ ,\ g) = \frac{1}{4}[\|f+g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f-ig\|^2] \ ,$$

因此又有

定理4.2.8.(**普兰舍利**(Plancherel)**定理**). 对$f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$有

$$(f\ ,\ g)_{dx} = (\hat{f}\ ,\ \hat{g}\ )_{d\xi}. \tag{32}$$

习 题

1. 设$f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$，$xf(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$，证明$D_\xi \hat{f}(\xi)$存在，而且$(xf)\hat{\ }(\xi) = -D_\xi \hat{f}(\xi)$.

[提示：先证明$\frac{1}{h}[\hat{f}(\xi+he_j) - \hat{f}(\xi)] = F\left[f(x)\frac{e^{-ix\cdot he_j}-1}{h}\right]$. 这里$e_j = (0,\cdots,1,\cdots,0)$(1是第$j$个分量).]

2. 设$f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$，$D_x f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$，证明$(D_{x_j} f(x))\hat{\ }(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi)$.

3. 令$f(x) \in L^1(\mathbf{R})$，$S_R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}\hat{f}\ (\xi)d\xi$，$x \in \mathbf{R}$.

(i) 应用富比尼定理证明

$$S_R(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin R\tau}{\tau}\frac{f(x+\tau)+f(x-\tau)}{2}d\tau;$$

(ii) 令$g_x(\tau) = \frac{1}{2}[f(x+\tau)+f(x-\tau)] - f(x)$，证明

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin R\tau}{\tau} g_x(\tau)d\tau;$$

(iii) 设$\int_0^\delta \left|\frac{g_x(\tau)}{\tau}\right| d\tau < \infty$ (δ为某个正数)，证明

$$\lim_{R\to\infty} S_R(x) = f(x) \ .$$

[提示：将$S_R(x) - f(x)$分成和$\int_0^\delta + \int_\delta^\infty$，并对第二个积分应用黎曼—勒贝格引理. 本题即是$L^1$中的傅里叶变换反演公式.]

第五章　偏微分方程一般理论

§1. 柯西—柯瓦列夫斯卡娅定理

1. **定理的简化** 上面我们建立了研究偏微分方程的数学工具. 那么，偏微分方程最基本的问题是什么呢? 和常微分方程一样，解的存在性和唯一性是基本问题之一. 常微分方程理论的基本的定理是其柯西问题解的存在定理：若

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ , \tag{1}$$

$$y(x_0)=y_0, \tag{2}$$

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近连续，则必有解存在. 若再加上一些条件，例如 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近对 y 适合利普西茨条件，则还有解的唯一性. 对偏微分方程人们也考虑了类似的柯西问题. 例如：

$$\frac{\partial^{k_l}u_l}{\partial t^{k_l}}=G_l(x,t;\cdots,\partial_x^\alpha\partial_t^j u_s,\cdots)_{|\alpha|+j\leqslant k_s,\ j<k_s,\ s\leqslant N}, \tag{3}$$

$$\partial_t^j u_l(x,t_0)=g_{jl}(x)_{0\leqslant j<k_l} \tag{4}$$

$$(1\leqslant l\leqslant N).$$

19 世纪中叶，柯西在 G_l 和 g_{jl} 均为其变元的解析函数的条件下，证明了其解析解的存在性和唯一性，即有如下著名的柯西 — 柯瓦列夫斯卡娅(Cauchy-Kowalevski)①定理：

定理 5.1.1. 若 $g_{jl}(x)$ 在 x^0 的某邻域内解析($l=1,\cdots,N$; $j=0,\cdots,k_l-1$)，G_l 在 $(x^0,t_0;\cdots,\partial_x^\alpha g_{jl}(x^0),\cdots)$ 的某个邻域内解析($|\alpha|+j\leqslant k_l$, $j<k_l$)，则柯西问题(3)(4) 在 (x^0,t_0) 的某个邻域内存在唯一解析解.

为了证明定理 5.1.1，可把柯西问题(3)(4) 化为一阶拟线性方程组. 作向量 Y，其分量记为 $(y_{\alpha,j}^l)$，其中 $0\leqslant|\alpha|+j\leqslant k_l$，且令 $y_{\alpha,j}^l=\partial_x^\alpha\partial_t^j u_l$，则有

定理 5.1.2. 柯西问题(3)(4)等价于某个一阶拟线性方程组的柯西问题：

$$\begin{cases}\partial_t Y=\displaystyle\sum_{j=1}^n A_j(x,t,Y)\partial_{x_j}Y+B(x,t,Y)\ ,\\ Y(x,t_0)=\Phi(x)\ .\end{cases} \tag{5}$$

---

① 柯瓦列夫斯卡娅是俄罗斯女数学家，按俄罗斯姓氏的习惯，她的姓名的英文习惯拼法可以是 Kowalevski，Kowalewski，Kowalevskaja 甚至是 Kowalevska.

证　若 α 是非零重指标，i 表示使 $\alpha_i \neq 0$ 中最小的数，I_i 表示第 i 个分量为 1，其余分量为零的重指标，则 $y^l_{\alpha,j} = \partial^\alpha_x \partial^j_t u_l$ 满足一阶方程组：

$$\begin{cases} \partial_t y^l_{\alpha,j} = y^l_{\alpha,j+1}, & |\alpha| + j < k_l, \\ \partial_t y^l_{\alpha,j} = \partial_{x_i} y^l_{\alpha-I_i,j+1}, & |\alpha| > 0,\ |\alpha| + j = k_l, \\ \partial_t y^l_{0,k_l} = \dfrac{\partial G_l}{\partial t} + \displaystyle\sum_{s=1}^N \sum_{|\alpha|+j<k_s} \dfrac{\partial G_l}{\partial y^s_{\alpha,j}} y^s_{\alpha,j+1} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{s=1}^N \sum_{|\alpha|+j=k_s, j<k_s} \dfrac{\partial G_l}{\partial y^s_{\alpha,j}} \partial_{x_i} y^s_{\alpha-I_i,j+1}, & l = 1,\cdots,N, \end{cases} \tag{6}$$

及初始条件

$$\begin{cases} y^l_{\alpha,j}(x,t_0) = \partial^\alpha_x g_{jl}(x), & j < k_l, \\ y^l_{0,k_l}(x,t_0) = G_l(x,t_0;\cdots,\partial^\alpha_x g_{js}(x),\cdots) \end{cases} \tag{7}$$

$$(|\alpha| + j \leqslant k_s,\ j < k_s,\ s \leqslant N;\ l = 1,\cdots,N),$$

(6)(7)即为形状如(5)柯西问题，而 $\Phi(x)$ 即由(7)之右方构成的列向量．显然，若 $(u_1,\cdots,u_N)$ 为(3)(4)的解，则 $y^l_{\alpha,j} = \partial^\alpha_x \partial^j_t u_l$ 满足(6)及(7)．反之，若 $y^l_{\alpha,j}$ 满足(6)及(7)，则令 $u_l = y^l_{0,0}$，我们证明它满足(3)(4)．事实上，由(6) 第一式可得，对于 $|\alpha| + i + j \leqslant k_l$ 有

$$y^l_{\alpha,j+i} = \partial^i_t y^l_{\alpha,j}, \tag{8}$$

则由(7)之第一式当 $\alpha = 0$ 时，有 $(\partial^j_t y^l_{0,0})|_{t=t_0} = y^l_{0,j}(x,t_0) = g_{jl}(x) \quad (j < k_l)$，即满足初始条件(4)．

下面，我们证明

$$y^l_{\alpha,j} = \partial_{x_i} y^l_{\alpha-I_i,j} \quad (\alpha \neq 0). \tag{9}$$

因由初始条件(7)第一式知

$$y^l_{\alpha,j}(x,t_0) = \partial^\alpha_x g_{jl}(x) = \partial_{x_i} \partial^{\alpha-I_i}_x g_{jl} = \partial_{x_i} y^l_{\alpha-I_i,j}(x,t_0).$$

当 $|\alpha| + j = k_l$，$\alpha \neq 0$ 时，由(6)之第二式及(8)知

$$\partial_t y^l_{\alpha,j} = \partial_t \partial_{x_i} y^l_{\alpha-I_i,j},$$

所以可得此时有(9)成立．对 $|\alpha| + j < k_l$，$\alpha \neq 0$ 时，因 $\partial_t y^l_{\alpha,j} = y^l_{\alpha,j+1}$，$\partial_t \partial_{x_i} y^l_{\alpha-I_i,j} = \partial_{x_i} y^l_{\alpha-I_i,j+1}$，故只要(9)式对于 $j+1$ 成立，便可得对 j 也有(9)成立．于是由 $|\alpha| + j = k_l$ 时(9)成立，便归纳地得到对 $|\alpha| + j < k_l$，$\alpha \neq 0$ 时(9)是成立的．

由(6)之第三式及(8)和(9)得

$$\begin{aligned} \partial_t y^l_{0,k_l} &= \frac{\partial G_l}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j\leqslant k_s, j<k_s, 1\leqslant s\leqslant N} \frac{\partial G_l}{\partial y^s_{\alpha,j}} \frac{\partial y^s_{\alpha,j}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} G_l(x,t,\cdots,y^s_{\alpha,j},\cdots), \end{aligned}$$

$$(|\alpha| + j \leqslant k_s,\ j < k_s;\ l = 1,\cdots,N)$$

再由(7)之第二式，

$$\begin{aligned} y^l_{0,k_l}(x,t_0) &= G_l(x,t_0,\cdots,\partial^\alpha_x g_{js}(x),\cdots) \\ &= G_l(x,t_0,\cdots,y^s_{\alpha,j}(x,t_0),\cdots). \end{aligned}$$

以此为初值，对上式两边积分，即得

$$y^l_{0,k_l}(x,t) = G_l(x,t,\cdots,y^s_{\alpha,j}(x,t),\cdots)\ . \tag{10}$$

而反复地应用(8)及(9)，可得

$$y^l_{\alpha,j} = \partial^\alpha_x \partial^j_t y^l_{0,0}.$$

所以，(10)即表明 $u_l = y^l_{0,0}$ 满足(3).

对柯西问题(3)(4)还可作进一步简化.

首先，对自变量通过坐标平移将 (x^0,t_0) 化为坐标原点.

其次，作未知函数代换，令 $U(x,t) = Y(x,t) - \Phi(x)$. 则(5)化为

$$\begin{cases}\partial_t U = \sum\limits_{j=1}^n A_j(x,t,U+\Phi)\partial_{x_j}U + B(x,t,U+\Phi) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j=1}^n A_j(x,t,U+\Phi)\partial_{x_j}\Phi\ , \\ U(x,0) = 0\ .\end{cases}$$

为使系数 A_j 及 B 不含自变量 t，可以增加一个未知函数 $u^0 = t$，于是得到额外方程 $\partial_t u^0 = 1$ 及初始条件 $u^0(x,0) = 0$，这样做可进一步简化下面的推导.

2. 定理的证明 定理5.1.1成立等价于下面简化的柯西－柯瓦列夫斯卡娅定理成立.

定理5.1.3. 柯西问题

$$\begin{cases}\partial_t U = \sum\limits_{j=1}^n A_j(x,U)\partial_{x_j}U + B(x,U)\ , \\ U(x,0) = 0\ ,\end{cases} \tag{11}$$

当 $A_1,\cdots,A_n$，B 在原点附近为解析时在原点的某邻域有唯一的解析解. 这里 $U = (u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t))^t$.

证 由(11)之第二式，对任意重指标 α 有

$$\partial^\alpha_x U(x,t)|_{t=0} = 0\ ,$$

即有 $\partial^\alpha_x U(0,0) = 0$. 归纳地设 $\partial^l_t\partial^\alpha_x U(0,0)$ 已求出，其中 $0 < l \leqslant k-1$，则由(11)之第一式知

$$\partial^k_t\partial^\alpha_x U(0,0) = \partial^{k-1}_t\partial^\alpha_x\Big(\sum A_j(x,U)\partial_{x_j}U + B(x,U)\Big)(0,0)\ . \tag{12}$$

上式右边各项关于 U 的微商为 $\partial^l_t\partial^\beta_x U$，其中 $0 \leqslant l \leqslant k-1$，$|\beta| \leqslant |\alpha| + 1$，由此知上式右边为已知，于是便定出 $\partial^k_t\partial^\alpha_x U(0,0)$. 所以，若 U 为(8)的在原点附近的解析解，由 $\partial^k_t\partial^\alpha_x U(0,0)$ 的唯一性，知 $U(x,t)$ 是唯一的.

下面证明解析解的存在性. 由于要求 $U(x,t)$ 在原点邻域解析，故可将它表示为形式幂级数

$$U(x,t) = \sum_{k,\alpha}\frac{1}{k!\alpha!}\partial^k_t\partial^\alpha_x U(0,0)x^\alpha t^k.$$

其系数 $\partial^k_t\partial^\alpha_x U(0,0)$ 由(11)递推地得出为已知. 因这些系数是从(11)获得的，故若上述幂级数在原点某邻域收敛，其和函数 $U(x,t)$ 必满足方程(11)之第一式，而初始条件 $U(x,0) = 0$ 是显然满足的.

现在设另有柯西问题(称为优于(11)的柯西问题)

$$\begin{cases}\partial_t\widetilde{U} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x,\widetilde{U})\partial_{x_j}\widetilde{U} + \widetilde{B}(x,\widetilde{U}) , \\ \widetilde{U}(x,0) = 0 .\end{cases}$$

其中，$\widetilde{U} = (\widetilde{u}_1,\cdots,\widetilde{u}_m)$，$\widetilde{A}_j$，$\widetilde{B}$ 的泰勒级数为 A_j，B 的泰勒级数之优级数. 类似(12)有

$$\partial_t^k\partial_x^\alpha\widetilde{U}(0,0) = \partial_t^{k-1}\partial_x^\alpha\Big(\sum\widetilde{A}_j(x,\widetilde{U})\partial_{x_j}\widetilde{U} + \widetilde{B}(x,\widetilde{U})\Big)(0,0) . \tag{13}$$

应用(12)及(13)则可递推地证明

$$|\partial_t^k\partial_x^\alpha U(0,0)| \leqslant \partial_t^k\partial_x^\alpha\widetilde{U}(0,0) .$$

若 $\widetilde{U}$ 在(0,0)附近是解析的，即它的泰勒级数为 $U(x,t)$ 的泰勒级数之优级数，因此 $U(x,t)$ 的泰勒级数在原点的某个邻域收敛.

只要适当选择 $\widetilde{A}_j$ 和 $\widetilde{B}$，可证明优于(11)的柯西问题的解是存在的. 事实上，若 $f(x)$ 在原点附近解析，则必存在正数 ρ 和 M 使得

$$|\partial^\alpha f(0)| \leqslant M|\alpha|!\rho^{-|\alpha|}.$$

于是，令

$$\begin{aligned}F(x) &= M\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}|\alpha|!\rho^{-|\alpha|}x^\alpha \\ &= M\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\Big(\frac{x}{\rho}\Big)^\alpha \\ &= M\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\rho}\Big)^k \\ &= \frac{M\rho}{\rho - (x_1 + \cdots + x_n)} .\end{aligned}$$

此级数优于 $f(x)$ 的泰勒级数. 于是取优于(11)的柯西问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} = \dfrac{M\rho}{\rho - \sum\limits_{j}^{n} x_j - \sum\limits_{j=1}^{m}\widetilde{u}_j}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\partial_{x_k}\widetilde{u}_j + 1\Big) , \\ \widetilde{u}_i(x,0) = 0 , \qquad i = 1,\cdots,m .\end{cases}$$

容易看出，这个问题有如下形式的解：

$$\widetilde{u}_1(x,t) = \cdots = \widetilde{u}_m(x,t) = V(x_1 + \cdots + x_n,t) \triangleq V(s,t) .$$

其中 $V(s,t)$ 满足下述柯西问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{M\rho}{\rho - s - mV}\Big(1 + mn\dfrac{\partial V}{\partial s}\Big) , \\ V(s,0) = 0 .\end{cases}$$

可以验证，此问题有解

$$V(s,t) = \frac{1}{m(n+1)}\Big[\rho - s - \sqrt{(\rho - s)^2 + 2(n+1)Mm\rho t}\Big]$$

在原点的某邻域内解析. 即可得 $\widetilde{U} = (\widetilde{u}_1(x,t),\ldots,\widetilde{u}_m(x,t))$ 作为 x,t 的幂级数在原点某邻域是收敛的. 至此定理 5.1.3 证毕. 从而也就知道定理 5.1.1 成立.

柯西 — 柯瓦列夫斯卡娅定理只表明了解析解的局部存在性及唯一性. 它不能保证解的整体存在性，且关于唯一性只是在解析解框架下成立，并不排除存在非解析解的可能性. 然而当方程为线性方程时，由著名的 Holmgren 定理给出了 C^∞ 解的唯一性结论. 对一

一般唯一性的研究，仍是一个未完全解决的问题.

§ 2. 局部可解性

柯西 — 柯瓦列夫斯卡娅定理只在解析函数类框架下建立解的局部存在性. 然而，在 C^∞ 函数框架下，情况会怎样呢? 我们首先引入 C^∞ 偏微分算子局部可解的概念.

定义 5.2.1. 设 $P=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ 为一具有 C^∞ 系数 $a_\alpha(x)$ 的 m 阶线性偏微分算子，$x_0\in\mathbf{R}^n$. 若对任意 C^∞ 函数 $f(x)$，存在一个广义函数 u，在 x_0 的某个邻域中满足

$$Pu=f\ , \tag{14}$$

则称微分算子 P 在 x_0 是局部可解的.

注意，我们可假设 f 是有紧支集的，即 $f\in C_0^\infty$. 若 f 没有紧支集，可任取 C_0^∞ 函数 φ，使它在 x_0 的某邻域内恒等于 1. 假若我们证明了在 x_0 附近方程 $Pu=\varphi f$ 有广义函数解 u，那么 u 也是原问题在 x_0 附近的解.

对常系数的线性偏微分算子，可以用求基本解方法得到其局部可解性.

定义 5.2.2. 设 $P(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\partial^\alpha$ 是一常系数 m 阶线性偏微分算子. 若 $E\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 满足方程

$$P(D)E=\delta\ , \tag{15}$$

则称 E 为算子 $P(D)$ 的基本解.

最简单的例子是：微分算子 $\dfrac{d}{dx}$ 的基本解是赫维赛德函数 $H(x)$，但显然 $H(x)+C$(C 为任意常数)仍然是其基本解. 所以基本解不是唯一的，而可以加上适当条件得到满足此条件的唯一基本解，这是重要的方法. 对常系数线性偏微分算子的基本解的存在性是肯定的. 在下一节，我们将给出其证明. 我们可利用基本解研究线性偏微分算子的局部可解性. 考虑方程

$$P(D)u=f\ , \tag{16}$$

其中 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开区域. 应用单位分解后，我们可设 $f\in\mathscr{E}'(\Omega)$. 因此，$E*f$ 是可定义的广义函数. 于是，我们有

定理5.2.3. $u=E*f$ 是方程(16)之广义函数解.

证 $P(D)u=P(D)(E*f)=(P(D)E)*f=\delta*f=f$.

(15)有时写作为

$$P(D_x)E(x,y)=\delta(x-y)\ ,$$

相应(16)的解可写为 $u=\int E(x,y)f(y)dy$. 下面我们看一个例子.

例. 求解满足下列条件的 $E(x,y)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}E(x,y)=\delta(x-y)\ , \qquad x,y\in(0,1)\ ,$$

$$E(0,y)=E(1,y)=0\ , \qquad 0\leqslant y\leqslant 1\ .$$

通过直接积分可得

$$\frac{d}{dx}E(x,y)=H(x-y)+\alpha(y)\ ,$$

这里 $\alpha(y)$是任意函数. 再积分一次，得到

$$E(x,y)=\int H(x-y)dx+x\alpha(y)+\beta(y)$$

$$=(x-y)H(x-y)+x\alpha(y)+\beta(y)\ ,$$

这里 $\beta(y)$也是任意函数. 由条件 $E(0,y)=E(1,y)=0$，$0\leqslant y\leqslant 1$可得 $\beta(y)=0$，$\alpha(y)=-(1-y)$，所以

$$E(x,y)=(x-y)H(x-y)-x(1-y)\ , \qquad y\in(0,1)$$

并且可以验证 $u(x)=\int E(x,y)f(y)dy$ 满足两点边值问题：$\frac{d^2}{dx^2}u=0$，$u(0)=u(1)=0$.

至此，我们获得了常系数偏微分算子局部可解性的结论. 然而，对变系数线性算子及非线性情况又如何呢？后面我们将看到勒维(H. Lewy)的非局部可解性的反例. 在勒维的反例发表以后，人们对局部可解性进行了大量的研究，其中特别是霍曼德尔(L. Hörmander)发现了局部可解性的一般的必要条件. 这些条件将涉及到§5所定义的算子的主象征.

习　题

1. 求常系数常微分方程的基本解.

(i) 求$\frac{dy}{dx}=\delta(x)$在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$中的一切解，由此求它的支集在 $\mathbf{R}^+$与 $\mathbf{R}^-$中的基本解.

(ii) 求$\frac{dy}{dx}+ay=\delta(x)$在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$中的一切解，这里 a 是复常数，并根据 $\mathrm{Re}\,a$ 的符号求它在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$中的基本解.

[提示：令 $y=e^{-ax}z$.]

(iii) 把这个方法用于求常系数线性方程组$\frac{du}{dx}+Au=0$的右基本解 $E_右$，即$\frac{dE_右}{dx}+AE_右=\delta(x)I$. A 是 $k\times k$ 常数矩阵，$\mathrm{supp}E_右\subset\mathbf{R}^+$(令 $E_右=e^{-Ax}K$). 同法求 $E_左$.

(iv)* 利用 A 的特征根符号讨论 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$中的基本解.

2. 求柯西 — 黎曼算子在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$中的基本解 E，即

$$\frac{\partial E}{\partial x}+i\frac{\partial E}{\partial y}=\delta(x,y)\ .$$

[提示：对 y 作傅里叶变换：$\hat{E}\ (x,\eta)=\int e^{-iy\eta}E(x,y)dy.$]

3. 求解满足下列条件的 $E(x,y)$：

$$\frac{d^2}{dx^2}E(x,y)=\delta(x-y)\ ,\qquad x>0,\ y>0,$$

$$E(0,y)=\frac{d}{dx}E(1,y)=0\ ,\qquad y\geqslant 0\ .$$

4. 设 $p(x)^{-1}$是一个可积函数，证明 $E(x)=H(x)\int_0^x\frac{d\tau}{p(\tau)}$ 是算子$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\cdot\right)$的基本解.

§3. 常系数偏微分方程的基本解

设 $P(D)$为 k 阶常系数线性偏微分算子，现在考虑如何在 $\mathscr{S}'$而不是 $\mathscr{D}'$中求 $P(D)$ 的基本解 $E\in\mathscr{S}'$. 这时，我们可以利用傅里叶变换. 因为 E 的傅里叶变换 $\hat{E}\in\mathscr{S}'$，由 $P(D)E=\delta$，知 $\hat{E}=\frac{1}{P(\xi)}$. 但是 $P(\xi)$的零点使得很难求$\frac{1}{P(\xi)}$的逆傅里叶变换. 这就是求基本解的难点所在. 为此，下面我们分析 $P(\xi)$零点集的构造. 取 $\eta\in\mathbf{R}^n$ 使 $P(\eta)\neq 0$. 适当旋转坐标系使 $\eta=(0,0,\cdots,0,\eta_n)$，而 $P(\eta)$是 η_n 的 k 次多项式，不妨设其首项系数为1，即有

$$P(\eta)=\eta_n^k+\cdots\ ,$$

这里“…”是 η_n 的低次项. 仍记 η_n 为 ξ_n，$\xi=(\xi',\xi_n)$，$P(\xi)=P(\xi',\xi_n)=0$对 ξ_n 应有 k 个根 $\lambda_1(\xi'),\cdots,\lambda_k(\xi')$. 我们规定其次序如下：$i<j$ 时应有 $\mathrm{Im}\,\lambda_i<\mathrm{Im}\,\lambda_j$，若 $\mathrm{Im}\,\lambda_i=\mathrm{Im}\,\lambda_j$ 则要求 $\mathrm{Re}\,\lambda_i\leqslant\mathrm{Re}\,\lambda_j$. $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi')$对 ξ'是连续的. 现在回到原问题. 我们自然设想应当取

$$K(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{-ix\cdot\xi}\frac{1}{P(\xi)}d\xi\ . \tag{17}$$

但在上述积分中因 $P(\xi)$的零点而出现问题，我们可把它写为逐次积分 $\int_{\mathbf{R}}d\xi_1\cdots\int_{\mathbf{R}}*\,d\xi_n$，每个积分又都是在 $\xi_j\in\mathbf{C}$ 平面的实轴上进行的. 不改变前 $n-1$个积分路径，但将 ξ_n 的积分路径变为 $C_n(\xi')$：$\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')$(依赖于 ξ')，并记

$$K(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{n-1}}d\xi'\int_{\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')}e^{ix\cdot\xi}\frac{1}{P(\xi)}d\xi\ . \tag{18}$$

首先，我们应该适当选取 $\varphi(\xi')$，使 $\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')$避开 $P(\xi)$的零点.

可见问题在于如何选择 ξ_n 的积分路径 $\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')$. 作法如下：对每一个 $\xi_0'\in\mathbf{R}^{n-1}$，$\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi_0')$共有 k 个值(其中可以有重合者)，作 $k+1$个区间$[-k-1,\ -k+1]$，$[-k+1,\ -k+3]$，…，$[k-1,k+1]$. 其中至少有一个不含一切 $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi_0')$. 在此区间中取一点作 $\varphi(\xi_0')$之值，则$|\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi_0')-\varphi(\xi_0')|\geqslant 1$. 由于 $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi')$对 ξ'连续，故有以 ξ_0'为心的小球使在此球中$|\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi_0')-\varphi(\xi_0')|\geqslant 1$. 在此小球中令 $\varphi(\xi')=\varphi(\xi_0')$. 对每一点 $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$都这

样处理后，取可数多个小球覆盖 $\mathbf{R}^{n-1}$(因 $\mathbf{R}^{n-1}$不是有界的，仅取有限个小球是不够的．为什么取可数多个小球就够了，请读者自己考虑)．在每个小球中 $\varphi(\xi')$之值已定，而在两个小球相交之处任意选定一个 $\varphi(\xi')$之值即得 $\varphi(\xi')$．对于固定的 ξ'，$\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')$是一固定曲线，而对不同的 ξ'，$\varphi(\xi')$虽然只是分片常值函数，而曲线 $\mathrm{Im}\,\xi_k=\varphi(\xi')$与前不同，但是不论如何，这些曲线都不通过 $P(\xi)$的零点．

关于 $K(x)$的上述积分(18)是否收敛，我们必须在 $\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')$上对$1/P(\xi)$作出估计．记 $N(P)$为 P 的零点集，$d(\xi)=\mathrm{dist}(\xi,N(P))$，我们有

定理5.3.1.　令 $P(\xi)=\xi_n^k+\xi_n$ 的低次项，则

$$|P(\xi)|\geqslant\left(\frac{1}{2}d(\xi)\right)^k. \tag{19}$$

证　取 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 使 $P(\xi)\neq0$，$\eta=(0,\cdots,0,1)$，令 $g(t)=P(\xi+t\eta)$，其中 $t\in\mathbf{C}$，于是 $g(t)$是 t 的 k 次多项式，设其零点为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$(可取复值，且可能有重合的)：

$$g(t)=c\prod_{j=1}^{k}(t-\lambda_j)\ ,$$

于是 $g(0)=P(\xi)\neq0$且 $|g(t)/g(0)|=\prod_{j=1}^{k}|1-t/\lambda_j|$．因为 $\xi+\lambda_j\eta\in N(P)$，故 $d(\xi)\leqslant\min_j|\xi-(\xi+\lambda_j\eta)|=\min_j|\lambda_j|$，从而当$|t|\leqslant d(\xi)$时$|1-t/\lambda_j|\leqslant1+|t/\lambda_j|\leqslant2$而$|g(t)/g(0)|\leqslant2^k$．同理，由柯西公式

$$|g^{(k)}(0)|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{|t|=d(\xi)}g(t)t^{-k-1}dt\right|\leqslant\frac{k!}{2\pi}\frac{2^k|g(0)|}{[d(\xi)]^{k+1}}\cdot2\pi d(\xi)\ .$$

但是$|g(0)|=|P(\xi)|$，$|g^{(k)}(0)|=|\partial^kP(\xi)/\partial\xi_n^k|=k!$．代入上式即得

$$k!\leqslant k!2^k|g(0)|/[d(\xi)]^k,$$

从而(19)式得证．

下面，我们便可以证明常系数线性偏微分算子的基本解的存在性．

定理5.3.2.　常系数线性偏微分算子必有 $\mathscr{S}'$基本解存在．

证　对于 $K(x)$的积分式(18)，我们虽然避开了 $P(\xi)$的零点，$[P(\xi)]^{-1}$当 $\mathrm{Re}\xi_n\to\infty$时趋于0并不足以使(18)收敛．为此将 $P(D)$换成 $P(D)(1-\Delta)^N$(N 待定)．由于在积分区域上$|P(\xi)|\geqslant(d(\xi)/2)^k$，所以$|P(\xi)|(1+|\xi|^2)^N\geqslant c(1+|\xi|^2)^N$，$c$ 是一个正常数．当$2N>n$ 时，积分

$$K_N(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{n-1}}d\xi'\int_{\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')}e^{ix\cdot\xi}[P(\xi)(1+|\xi|^2)^N]^{-1}d\xi_n$$

收敛．而且

$$P(D)(1-\Delta)^NK_N(x)=\delta(x)\ .$$

实际上，注意到 $P(D)(1-\Delta)^N$ 的转置算子即 $P(-D)(1-\Delta)^N$，故对任意 $\psi\in C_0^\infty$有

$$\langle P(D)(1-\Delta)^NK_N,\psi\rangle=\langle K_N,P(-D)(1-\Delta)^N\psi\rangle$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}dx\int_{\mathbf{R}^{n-1}}d\xi'\int_{\mathrm{Im}\,\xi_n=\varphi(\xi')}e^{ix\cdot\xi}P(-D)(1-\Delta)^N\psi\,d\xi_n/P_N(\xi)\ ,$$

其中 $P_N(\xi)=P(\xi)(1+|\xi|^2)^N$．所以在上式中交换积分次序，并注意到

$$\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}g(x)dx=\hat{g}\ (-\xi)\ ,$$

取 $g(x)=P(-D)(1-\Delta)^N\psi(x)$，注意到 $\hat{g}(\xi)=P(-\xi)(1+|\xi|^2)^N\hat{\psi}(\xi)$，即有

$$\begin{aligned}\langle P(D)(1-\Delta)^N K_N,\ \psi\rangle &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{n-1}}d\xi'\int_{\mathrm{Im}\,\xi_n=\phi(\xi')}\frac{1}{P_N(\xi)}d\xi_n\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}g(x)dx\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{n-1}}d\xi'\int_{\mathrm{Im}\,\xi_n=\phi(\xi')}\frac{1}{P_N(\xi)}d\xi_n\,\hat{g}(-\xi)\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\psi}(-\xi)d\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{i0\xi}\hat{\psi}(-\xi)d\xi=\psi(0)\\ &= \langle\delta,\ \psi\rangle,\end{aligned}$$

所以 $P(D)(1-\Delta)^N K_N(x)=\delta(x)$. 这里我们利用了 $\hat{\psi}(-\xi)$对 ξ 急减，所以可以用柯西定理将 ξ_n 的积分路径改为 $\mathrm{Im}\,\xi_n=0$. 令

$$E(x)=(1-\Delta)^N K_N(x)\ , \tag{20}$$

即知 $P(D)E(x)=\delta(x)$，从而 $E(x)$是一个基本解. 由 $K_N(x)$之表达式知 $K_N(x)\in\mathscr{S}'$，再由(20)即知 $E\in\mathscr{S}'$，所以它就是所求的 $\mathscr{S}'$基本解. 定理证毕.

§4. 勒维反例

并不是任何一个偏微分方程都有解，即使是局部解也不一定存在(除了§2所讲的常系数偏微分方程外)，勒维在1957年给出了一个无解方程的反例，他的例子使人们大吃一惊. 勒维的例子十分简单，即是

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_1,x_2,x_3)\ . \tag{21}$$

令　$z=x_1+ix_2$，$t=x_3$，并记$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}-i\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$，则(21)可写为

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+iz\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}f(z,t)\ . \tag{21$'$}$$

令 $\Omega=\{(z,t);\ |z|^2<a,|t|<b\}$，$a$，$b$ 充分小. 勒维的结果如下：*存在 $f\in C^\infty(\Omega)$使(21)$'$没有解 $u\in C^1(\Omega)$存在.*

为证明这个结果，令 $\rho=x_1^2+x_2^2$，而取实变量(ρ,t)的 C^1复值函数$\psi(\rho,t)$，使 $\mathrm{supp}\,\psi\subset\{(\rho,t);\ 0<\rho<a,|t|<b\}$. 对 $\varphi(x_1,x_2,t)=\psi(\rho,t)$，有

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_1}+i\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_2}\right)=z\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\rho}\ .$$

因此，若 u 是(21)$'$的 C^1解，用分部积分法：

$$\frac{1}{2}(f\ ,\varphi)=(u_{\bar{z}}+izu_t,\ \varphi)=\iiint_\Omega(u_{\bar{z}}+izu_t)\bar{\varphi}\,dx_1dx_2dt$$

$$=-\iiint_\Omega u(\bar{\varphi}_{\bar{z}}+iz\bar{\varphi}_t)dx_1dx_2dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-b}^{b}dt\int_0^a zu(\bar{\psi}_\rho+i\bar{\psi}_t)d\rho\ , \tag{22}$$

这里没有 $\partial\Omega$ 上的积分，因为 φ 在 $\partial\Omega$ 附近恒为0. 采用极坐标(r,θ)，因 $\rho=r^2$，$dx_1dx_2=\frac{1}{2}d\rho d\theta$，如果$(21)'$中的 f 仅与 t 有关，则因 φ 也仅与 ρ，t 有关，上式中的

$$(f\ ,\varphi)=\pi\int_{-b}^{b}dt\int_0^a f\bar{\psi}\,d\rho dt\ .$$

因此，若记 $U(\rho,t)=\int_0^{2\pi}zud\theta$，代入(22)有

$$-\int_{-b}^{b}dt\int_0^a U(\bar{\psi}_\rho+i\bar{\psi}_t)d\rho=\frac{\pi}{2}\int_{-b}^{b}dt\int_0^a f\bar{\psi}\,d\rho\ ,$$

再作分部积分即有

$$\int_{-b}^{b}dt\int_0^a(U_\rho+iU_t-\frac{\pi}{2}f)\bar{\psi}\,d\rho=0\ .$$

由于 ψ 是任意的，有

$$U_\rho+iU_t=\frac{\pi}{2}f(t)=\frac{\pi}{2}g'(t)\ . \tag{23}$$

$g(t)$是 $f(t)$的任意光滑原函数. 如果记 $V=U+\frac{\pi}{2}ig$，则(23)式成为 $V_\rho+iV_t=0$. 如果分开 V 的实、虚部，这个式子就是柯西—黎曼方程组，而因为 V 和 U 一样是 C^1函数，V 就成为 $\rho+it$ 的解析函数.

由定义 U 之式可知 $U(0,t)=0$，从而 $\mathrm{Re}V(0,t)=0$. 故由对称原理知 V 可以解析拓展为 $\rho=0$附近(但$|t|<b$)的解析函数. 因此,$V(0,t)=U(0,t)+\frac{\pi}{2}ig(t)=\frac{\pi}{2}ig(t)$是 t 的解析函数($|t|<b$)，$f(t)=g'(t)$也是这样. 这就告诉我们，若(21)有 C^1解，$f(t)$必须是解析函数；而若 $f(t)$仅为 C^∞不为解析，(21)一定没有 C^1解.

不但如此，还可以证明(21)甚至在 $\mathscr{D}'(\Omega)$中也没有解，并且还可构造一些另外的无解方程的例子.

勒维的例子告诉我们，并非任何一个线性偏微分方程都有解. 那么哪些方程是可解的呢？当然，由前面知道常系数偏微分方程是可解的. 对变系数

方程，人们作了许多研究. 霍曼德尔等关于局部可解性的研究尤为重要. 然而，关于局部可解性的研究还有许多未解决的问题待人们进一步深入研究.

从以上关于适定性的分析看，偏微分方程的情形比常微分方程的情形复杂得多. 这也说明偏微分方程的本性和常微分方程是非常不相同的. 这是由于它所反映的物理规律是如此多种多样. 因此，研究偏微分方程最好的途径是以物理为指南，并研究反映不同类型物理规律的不同类型方程，然后才有可能进入比较一般的理论. 即令到那个时候，物理现象仍是我们考虑问题的指引. 这一点是偏微分方程理论非常显著的特点. 也正因为如此，我们把现在这个课程称为数学物理方程，而不称为一般的偏微分方程理论.

习　题

1. 令 $P(x,D)$是(21)中的算子，即

$$P(x,D)=\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

其中 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$，那么，方程

$$P(x,D)u-fu=0$$

不存在在 $\mathbf{R}^3$的任何开子集上连续的非平凡解.

[提示：考虑 $v=\ln u$ 所满足的方程.]

§5. 二阶线性偏微分方程的分类

人们的研究表明，反映不同物理规律的方程，其区别可以从方程的形状上看到，因此可对二阶线性偏微分方程进行分类. 设有二阶线性方程

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u=f(x),$$

其中 $a_{jk}(x)=a_{kj}(x)$. 为了傅里叶变换的需要，我们宁可采用记号 $D_j=-i\partial_{x_j}$，而考虑算子

$$P(x,D)=\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)D_jD_k+\sum_{j=1}^n b_j(x)D_j+c(x).\qquad(24)$$

(以下恒设 $a_{jk}(x)=a_{kj}(x)$)，与它相联系有一个代数形式

$$P(x,\xi)=\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\xi_j\xi_k+\sum_{j=1}^n b_j(x)\xi_j+c(x),\qquad(25)$$

称为 $P(x,D)$ 的全象征，特别重要的是它的二次齐性主部

$$P_2(x,\xi)=\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)\xi_j\xi_k, \tag{26}$$

称为其主象征.

在讨论算子(24)时，我们会看到，主象征的零点集起着特别重要的作用，确切些说，我们有

定义5.5.1. 我们定义 $P(x,D)$ 的特征集为：

$$\mathrm{Char}\ P=\{(x,\xi);\ \xi\in\mathbf{R}^n\backslash 0,\ P_2(x,\xi)=0\}. \tag{27}$$

于是我们进而对算子 $P=P(x,D)$ 分类如下：

定义 5.5.2. 若 $\mathrm{Char}\ P=\varnothing$，就称 P 为椭圆型的，换言之，若当 $\xi\neq 0$ 时对于某一点 x 恒有

$$\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)\xi_j\xi_k\neq 0,$$

成立，则称 P 在 x 点是椭圆型的. 若 P 在每一点 $x\in\Omega$ 皆为椭圆型的，则称 P 在 Ω 中是椭圆型的.

其他类型方程的定义则较复杂.

定义5.5.3. 若算子可写为

$$P=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x,t), \tag{28}$$

而 $\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\xi_j\xi_k>0(\xi\neq 0)$，则称 P 为抛物型的(更准确地说是模抛物型的).

最后，固定 x 则主象征 $P_2(x,\xi)$是一个二次型，而可通过关于 ξ 的线性变换化为标准形. 若此标准形是

$$\pm(\eta_1^2+\cdots+\eta_{n-1}^2-\eta_n^2),$$

则在此点 Char P 是一个两叶锥面. 这种情况特别重要，所以我们给出

定义5.5.4. 上述情况下称 P 在 x 点为双曲型的(或更精确地说，对 η_n 方向是强双曲型的).

需要强调的是，以上并没有将一切二阶方程分类，而只是挑选出了一些特别重要的子类. 其外还有许多其他类型，或者因为研究较少，或者因为尚不成熟，还可能因为要更多的数学工具，而不可能引入本教程中.

高阶方程的分类更为复杂，但大体上也是沿着以上诸定义的线索.

同一方程在不同区域可以属于不同类型. 最著名的例子是特里科米(Tricomi)方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{29}$$

它在 $y>0$ 处是椭圆型的，$y<0$ 处是双曲型的. 注意，$y=0$ 时方程是蜕化

的，此时方程并不能称为抛物型的. 这种方程称为混合型方程.

从上述定义显然可知，若算子 $P(x,D)$ 在某一点为椭圆型的，则 $P(x,D)$ 在这点的某个邻域内也为椭圆型的，同时，也可证明若 $P(x,D)$ 在某点为强双曲型的，则它在这点的某个邻域内也为强双曲型的. 抛物型情况较为复杂，这时我们把 t 和 x 分开，可以证明，若 $P=P(t,x;\partial_t,\partial_x)$ 在 (t_0,x_0) 是抛物型的，则当 x 在 x_0 的某个邻域中时，P 在 (t_0,x) 点也是抛物型的.

同时，我们可知由算子 $P(x,D)$ 的主象征 $P_2(x,\xi)$ 这个二次型的性质来判断方程的类型，若在某点附近 $P_2(x,\xi)$ 为正(负)定的，则算子 $P(x,D)$ 在该点附近为椭圆型的；若在某点附近 $P_2(x,\xi)$ 为负半定，且其矩阵 $(a_{jk}(x))$ 的秩为 $n-1$，而关于其蜕化方向的一阶导数的系数为正，则算子 $P(x,D)$ 为抛物型的；若在某点附近二次型 $P_2(x,\xi)$ 为非蜕化的不定型，且只有一个特征根的符号与其他所有的特征根符号不相同，则算子 $P(x,D)$ 为双曲型的.

很容易看到，第一章中引入的弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯方程分别是双曲型、抛物型和椭圆型的. 那么，一般的二阶方程能否化为它们呢？结果是，若系数充分光滑，则对两个自变量方程，在一点附近恒可通过变量变换将其主部化为以上情况之一(见第七章§3). 因此，这三个方程是典型的方程. 研究它们所得的结论具有很大的普遍意义. 以下三章将分别对这三个典型方程的性质进行研究.

习　题

1. 判断下列方程的类型：

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$；

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z,t)$；

(3) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

2. 证明方程

$$\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

不论 u 为方程的什么解它都是椭圆型的.

第六章　椭圆型方程

§1. 调和函数的性质

1. 拉普拉斯方程的基本解　本章中我们实际上只研究一个方程——拉普拉斯方程

$$-\Delta u=\sum_{j=1}^{n}D_j^2u=-\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2u=0\ . \tag{1}$$

它的主象征是 $|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$，($\Delta$ 的主象征是 $-|\xi|^2$)．$\Delta u=f$ 称为泊松方程．(1) 的 C^2 解称为调和函数．我们研究的方法是利用它的基本解．

虽然在前一章 §3 我们证明了一般常系数偏微分算子的基本解的存在性，但具体计算却相当复杂．然而一些特殊算子有许多特殊的性质，这将使其基本解的计算变得简单．这里讨论的拉普拉斯算子具有旋转不变性．而 $\delta(x)$ 也有同样的性质，故其基本解也应有这个性质，所以它应是一个只与矢径有关的广义函数．

那么，拉普拉斯方程的基本解是什么呢？我们还是从物理上找启发．为此设 $n=3$ 而求 $\mathbf{R}^3$ 中静电场的电位 $U(x)$．高斯定律告诉我们

$$\Delta U=-\rho(x).$$

$\rho(x)$ 是电荷密度(这里要选用适当单位制)．最简单的情况是在原点放一个单位正电荷．这时电荷分布的密度为 $\delta(x)$，而总电荷为 $\int\delta(x)dx=1$．且因为电荷集中在原点，即有 $\delta(x)=0$ 于 $x\neq0$ 处，$\delta(0)=\infty$．所以 $\delta(x)$ 就是第二章讲的 δ- 函数．我们在那里说过．这些物理直观是不严格的，而广义函数论把问题从数学上说清楚了．但这并不是说物理直观提供的信息都是不正确的．实际上它们是很重要的．我们现在将电荷的分布分解为点电荷，则总电场应是这些点电荷产生的电场的叠加，它的具体表达式以后再讲．记 $\delta(x)$ 所产生的电场电位为 $E(x)$，则由高斯定律有 $\Delta E=\delta$，即这个 $E(x)$ 就是拉普拉斯算子的基本解．从物理上很清楚，这个电位只与 x 点距点电荷位置(原点)之距离有关，所以，若用球坐标，则基本解应该可以写成 $E(r)$．这就是物理的分析给我们的启示．下面再作数学的分析就容易了．

现在在 $U(x)=U(r)$ 的形式下求基本解，即求解方程

$$-\Delta U=\delta\,,\tag{2}$$

其中 $r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$. 在球坐标下,

$$\Delta U=\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{dU}{dr}\,,\tag{3}$$

所以有

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{dU}{dr}=-\delta\,.$$

两边乘以 r^{n-1}, 因为当 $n\geqslant 2$ 时 $r^{n-1}\delta=0$, 故若记 $W=r^{n-1}U'$, 则应有

$$\frac{dW}{dr}=0\,.$$

因此 $W=C$, 即 $\frac{dU}{dr}=Cr^{1-n}$. 因此, 除相差一项常数外,

$$U=Cr^{2-n},\quad 当 n>2\,;\qquad U=C\ln\frac{1}{r},\quad 当 n=2\,.\tag{4}$$

余下的是要决定常数 C, 现在我们先给出结果, 具体的推导留在以后:

$$E(r)=\begin{cases}[(2-n)|S^{n-1}|]^{-1}r^{2-n}, & n>2\,;\\ -(2\pi)^{-1}\ln\dfrac{1}{r}\,, & n=2\,.\end{cases}\tag{5}$$

这里 $|S^{n-1}|$ 是 $n-1$ 维单位球面 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 的面积.

2. 格林公式 现在回到三维空间($n=3$)的情况. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是一有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 是光滑曲面. 函数 u 和 v 都设在 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 中. 于是因为

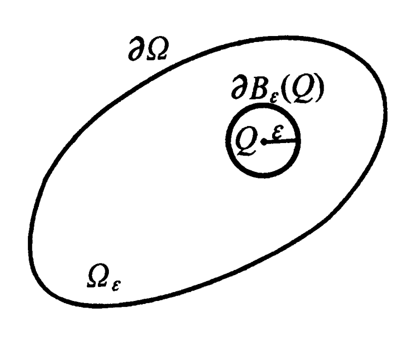


图 6－1

$$u\Delta v=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,,$$

$$v\Delta u=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,,$$

二者相减有

$$u\Delta v-v\Delta u=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}-v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

两边在 Ω 上积分, 利用数学分析中的高斯定理, 即得以下重要的格林公式:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dx=\iint\limits_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS\,.\tag{6}$$

$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

这个公式极为重要. 我们把它应用到 $v=\frac{1}{r}=r^{2-3}$ 上去, 这里 $r=|PQ|$, Q 是 Ω 中一个定点, P 是积分动点. 但是这个 v 并不属于 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 因此我们在 Ω 中挖去以 Q 为心、ε 为半径的小球, 而在余下的区域 Ω_ε

中应用(6)式. Ω_ε 的边界由两部分组成：$\partial\Omega$ 和以 Q 为心，ε 为半径，这个挖去了的小球之球面 $\partial B_\varepsilon(Q)$. 在后一部分上外法向量 $\boldsymbol{n}$ 即 $-r$ 方向. 因此我们有

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]dx=\iint\limits_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS-\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(Q)}\left[u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]dS. \tag{7}$$

上式左边因为在 Ω_ε 中 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，只余下 $-\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\Delta u}{r}dx$. 上式右边最后一项，因为在 $\partial B_\varepsilon(Q)$ 上 $r=\varepsilon$，所以 $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{\varepsilon^2}$，$\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon}$，因此

$$-\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(Q)}\left[u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(Q)}udS+\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(Q)}\frac{\partial u}{\partial r}dS.$$

但由积分中值公式 $\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}udS=u(Q^*)\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}dS=4\pi\varepsilon^2u(Q^*)$，$Q^*$ 是小球面上某一点. 因此，令 $\varepsilon\to0$，上式右边第一项趋于 $4\pi u(Q)$，且同理上式第二项趋于 0. 当 $\varepsilon\to0$ 时(7)式左边趋于 $-\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}dx$. 所以我们得到一个重要公式

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}dx. \tag{8}$$

特别是对于调和函数，因 $\Delta u=0$ 故有

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{9}$$

(8)式右边的三个积分都是所谓"位势型积分"，我们来逐项讨论其物理意义. $\frac{1}{r}=\frac{1}{r(P,Q)}$ 是放在 P 点处的单位正电荷在 Q 点产生的电位. 如果在 P 附近一小块面元 dS 上放一面密度为 $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}$ 的电荷，再把它们产生的电位叠加起来即得(8)的第一项. 所以它称为面密度为 $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}$ 的单层位势. 同样，第三项是体密度为 $-\frac{\Delta u}{4\pi}$ 的牛顿位势或体位势. 为了说明第二项的物理意义，我们要引入偶极子的概念. 将大小相同符号相反的两个点电荷 q 与 $-q$ 放在相

距 l 的两个位置上. 由 $-q$ 到 q 的方向称为极轴，$p=ql$ 称为偶极距. 当 $l\to 0$ 但方向不变、ql 之值 p 也不变的电荷系统称为一个偶极子. 我们来看一个单位偶极子产生的电位. 令 $q=\frac{1}{l}$，由 q 产生的电位是 $\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{r}$. 同理由 $-q$ 产生的电位是 $-\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{r'}$. 二者之和当 $l\to 0$ 时极限是 $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$. 所以 (8) 式第二项是分布在 S 上的面密度 $-\frac{1}{4\pi}u$、极轴为 $\boldsymbol{n}$ 的偶极子所产生的电位. 这好像是 $\partial\Omega$ 外侧有正电荷、内侧有负电荷产生的电位，所以称它为双层位势.

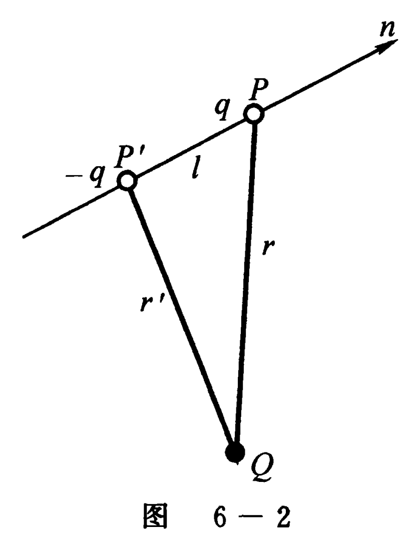


图 6－2

利用(8) 式即可最后决定(4) 中所说的 C. 设 $v=Cr^{-1}$ 是基本解(注意，因 $n=3$，故 $2-n=-1$)，于是对于 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\varphi(Q)=\langle\delta(Q-P)\ ,\varphi\rangle=\langle\Delta(Cr^{-1})\ ,\varphi\rangle$$
$$=C\langle r^{-1},\Delta\varphi\rangle=C\iiint_\Omega\frac{\Delta\varphi}{r}dx\ .$$

另一方面，在(8) 中令 $u=\varphi$，则因 φ 在 $\partial\Omega$ 附近为零而曲面积分的两项都不出现，即有

$$\varphi(Q)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{\Delta\varphi}{r}dx\ .$$

比较二式即得 $C=-1/4\pi$. 它就是 $n=3$ 时(5) 中的 $[(2-n)|S^{n-1}|]^{-1}=[-|S^2|]^{-1}=-1/4\pi$. n 为其他维数时的证明类此.

公式(8) 已在第二章中用广义函数解释过了.

还有一点应该说明. 方程 $\Delta U=-\rho(x)$ 只表示 Ω 内有密度为 $\rho(x)$ 的电荷存在，因此(8) 中的第三项出现是自然的. 何以还会有 $\partial\Omega$ 上的电荷与偶极子的分布从而产生前两项呢？这是由于 $\partial\Omega$ 上的感应电荷产生的.

3. **平均值公式与极值原理** 仍设 u 为调和函数. 在(6) 中令 $v=1$，则因 $\Delta u=\Delta v=0$，$\frac{\partial v}{\partial n}=0$，(6) 式成为

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0. \tag{10}$$

回到(9)，令 Ω 是以 Q 为心，R 为半径的球 $B_R(Q)$，则在 $\partial\Omega$(记作 $S(Q,R)$) 上，$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}$，$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{R^2}$，于是得到重要的平均值公式

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S(Q,R)}u(P)dS_P. \tag{11}$$

上式右边是 $u(P)$ 在 $S(Q,R)$ 上的球面平均值.（还有体积平均值公式留作一个习题.）利用平均值公式可以证明本节的主要定理 —— 极值原理.

设 Ω 是一个连通开集，即 Ω 中任意两点都可以用一条曲线联结起来. 设 u 是 Ω 中的调和函数，我们有

定理 6.1.1.（**极值原理**）. *若连通开集 Ω 中的调和函数 u 不恒等于一常数，则 u 必不能在 Ω 内达到其上、下确界.*

证 我们用反证法. 设 $u \not\equiv \text{const}$，而在 $Q \in \Omega$ 达到其上确界 M，从而 $M = u(Q) = \sup\limits_{\Omega} u$. 我们证明 u 在以 Q 为心而位于 Ω 内之任一球面 S 上皆等于 M. 事实上

$$M = u(Q) = |S|^{-1}\iint\limits_{S} u(P)dS_P.$$

若 $u(P_0) = M_1 < M$，$P_0 \in S$，由于 u 是连续的，所以在 P_0 附近 S 的一小片 S_1 上 $u < M - \varepsilon$，$\varepsilon > 0$. 因此

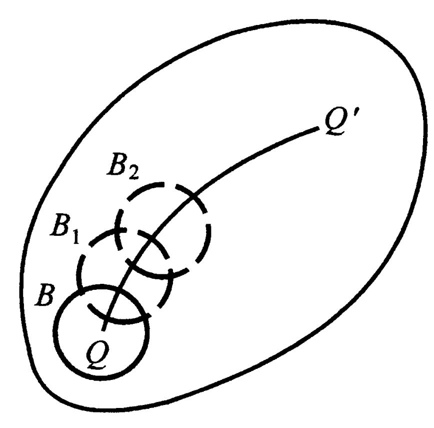


图 6－3

$$M = u(Q) = |S|^{-1}\iint\limits_{S_1} u(P)dS_P + |S|^{-1}\iint\limits_{S\setminus S_1} u(P)dS_P$$

$$\leqslant |S|^{-1}[(M-\varepsilon)|S_1| + M(|S| - |S_1|)] < M.$$

这就是矛盾. 因此在 S 上 $u \equiv M$. 由于 S 的半径可以任意变动，所以在以 Q 为心的某个球体 B 中 $u \equiv M$.

任取一点 $Q' \in \Omega$ 并以一条路径联结 Q 与 Q'（图 6－3）. 于是可以此路径含于 B 内之一点为心作另一球体 B_1，并且仿照上面的证明得知在 B_1 中 $u \equiv M$. 仿此进行即可证明 $u(Q') = M$，从而在 Ω 中 $u \equiv M$ 而与假设矛盾.

利用极值原理即可证明有界区域 Ω 中拉普拉斯方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{于 } \Omega \text{ 中}, \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{12}$$

解的唯一性和稳定性. 这里，f 是 $\partial\Omega$ 上已知连续函数. 狄利克雷问题是要求 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，在 Ω 内满足方程而在 $\partial\Omega$ 上适合边值条件. 若此问题有两个解 u_1 与 u_2，令 $u = u_1 - u_2$，则有

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

因为 $u \in C(\bar{\Omega})$，它一定会达到最大与最小值；或则二者皆在 $\partial\Omega$ 上达到，这时 $\max u = \min u = 0$，而 $u \equiv 0$；或则二者之一在 Ω 中达到，这时由极值原理 $u \equiv \text{const}$，而此常数值又一定为 0，否则不会有 $u|_{\partial\Omega} = 0$. 总之 $u \equiv 0$，即 $u_1 \equiv u_2$ 而唯一性得证.

为证稳定性，将(12) 之边值条件改为

$$u|_{\partial\Omega} = g\ . \tag{13}$$

g 是 $\partial\Omega$ 上另一连续函数，而且设在 $\partial\Omega$ 上

$$|h| = |f - g| < \varepsilon\ .$$

若分别记(12)、(13) 加上 $\Delta u = 0$ 之解为 u_f 和 u_g，其差为 $u_h = u_f - u_g$，则有

$$\Delta u_h = 0\ , \qquad u_h|_{\partial\Omega} = h = f - g\ .$$

利用极值原理很容易看到

$$|u_h| \leqslant \max|h| < \varepsilon\ .$$

这就是解对边值的稳定性.

习　　题

1. 设 $\Omega = B_R(Q)$(以 Q 为心、R 为半径的开圆域)，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，证明：

(1) $u(Q) = \dfrac{1}{4\pi R^2}\displaystyle\iint\limits_{\partial B_R(Q)} u(P)dS_P + \dfrac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_R(Q)}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right)\Delta u dx\ .$

(2) 若 $\Delta u \geqslant 0$，则 $u(Q) \leqslant \dfrac{1}{4\pi R^2}\displaystyle\iint\limits_{\partial B_R(Q)} u(P)dS_P.$

[提示：利用公式(8).]

2. 证明单层位势和双层位势在 $\partial\Omega$ 外皆为调和函数. 牛顿位势在 Ω 外也是调和的.

3. 令 $u(Q) = \displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f(P)dx_P/r(P,Q)$，$f$ 可积，证明在广义函数意义下，在 Ω 中有

$$\Delta u = -4\pi f\ .$$

[提示：令 $F(P) = f(P)$，$P \in \Omega$；$F(P) = 0$，$P \overline{\in} \Omega$，则 $F \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^3)$，而且 $u = (1/r * F)(Q)$.]

4. 拉普拉斯方程的诺依曼(Neumann) 问题是：

$$\Delta u = 0 \quad 于\ \Omega\ 中,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f\ ,$$

其中 f 已知、连续. 证明它在 $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 中可解的必要条件是：

$$\int_{\partial\Omega} f dS = 0\ .$$

5. 证明第一格林公式

$$\iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iiint\limits_{\Omega} u\Delta v dx + \iiint\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx\ .$$

这里 u、v 皆假设足够光滑. 令 $u = v$ 为调和函数，利用此式证明：若 u 是习题 4 中诺依曼问题的解，则问题的一切解必可表为 $u + C$，C 是常数. 当然所有 $u + C$ 也都是此问题之解.

6. 若 Ω 是有界连通开集，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，并且 u 在 Ω 上有：$\Delta u \geqslant 0$，$u \neq C$(常

数)，则 u 必不可在 Ω 内部达到其上确界.

[提示：按定理 6.1.1 的方法.]

7. 若 Ω 是平面上的有界连通开集，$O \in \Omega$，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \backslash O, \\ u|_{\partial\Omega} = \sin xy, \\ \lim\limits_{(x,y)\to O} u(x,y) = +\infty. \end{cases}$$

证明：$u \geqslant -1$，在 $\Omega \backslash O$ 中.

8. 设 $B_R(Q)$ 是以 Q 为心、R 为半径的球体，证明调和函数的体积平均值公式：

$$u(Q) = \frac{1}{|B|} \iiint\limits_{B_R(Q)} u(P) dx_P,$$

$|B|$ 表示该球的体积：$|B| = \frac{4}{3}\pi R^3$.

[提示：取 $0 < r < R$，并在 $S(Q,r)$ 上对 u 应用球面平均值公式，再将 $4\pi r^2 u(Q)$ 对 r 自 0 到 R 求积分.]

9. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为有界连通开集，证明下列外问题的解是唯一的：

$$\Delta u = 0, \qquad \text{在 } \mathbf{R}^3 \backslash \overline{\Omega},$$
$$u|_{\partial\Omega} = f(x),$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

$f(x)$ 为已知的在 $\partial\Omega$ 附近定义的连续函数.

10. 设 Ω 是有界连通开集，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足方程

$$\Delta u - u^2 = 0, \qquad \text{当 } x \in \Omega.$$

证明：u 必不可在 Ω 内部达到最大值，除非 $u \equiv 0$.

11. 设 Ω 是有界连通开集，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u + |\nabla u|^2 - u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

试证：$u(x) \equiv 0$，　当 $x \in \overline{\Omega}$.

[提示：用反证法，考虑 u 的最大值(或最小值)点处 Δu 的符号.]

12. 设有一般的二阶椭圆型算子 P 如下：

$$Pu \equiv \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u,$$

其中 $c(x) < 0$，$a_{jk}(x)$，$b_j(x)$，$c(x)$ 皆为 Ω 中的连续函数，$a_{jk} = a_{kj}$，$\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2$，$\lambda > 0$，若 $u \in C^2(\Omega)$ 使在 Ω 中 $Pu = 0$，如果 u 在 Ω 中达到最大与最小值，必有 $u \equiv 0$.

[提示：设 u 在 $x_0 \in \Omega$ 达到它的最大值，可考虑作一个线性变换将二次型 $\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x_0)\xi_j\xi_k$ 化为标准形，从而可用一个线性变换在 x_0 点(但不是其任意小的邻域)将 Pu 化为

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(y)\frac{\partial u}{\partial y_j}+cu\,,\quad \mu_j>0.$$

由此研究 $u(x_0)=\max u$ 的符号；同样，研究 $\min u$ 的符号. 另外，也可直接考查 $\sum\limits_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x_0)\dfrac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_j\,\partial x_k}$ 的符号，注意到它为系数矩阵 $(a_{jk}(x))$ 与 $u(x)$ 的黑赛(Hesse)矩阵的乘积矩阵(在 $x=x_0$) 的迹，当 $u(x_0)$ 为最大值时，由椭圆性便可推出上述迹为负. 取最小值时以 $-u(x)$ 代替 $u(x)$ 讨论之.]

§2. 简单区域中的狄利克雷问题

1. 边值问题概述 椭圆型方程最常见的定解问题是边值问题. 第一章中即已指出，它的柯西问题是不适定的. 拉普拉斯方程最常见的边值问题是在 $\partial\Omega$ 上给出以下边值条件之一：

狄利克雷问题： $u|_{\partial\Omega}=f$；

诺依曼问题： $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f$；

第三边值问题： $\left.\left(a\dfrac{\partial u}{\partial n}+bu\right)\right|_{\partial\Omega}=f$， a，b 同号.

对于狄利克雷问题，我们要求解在 $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 中；对另两个问题，则要求解在 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 中. 还要注意，有时 Ω 是一有界区域，这时的边值问题称为内问题；有时 Ω 是闭曲面 $\partial\Omega$ 的外部而以 ∞ 为其内点，即 $\partial\Omega$ 不通过 ∞ 点，这时的边值问题称为外问题. 求解外问题时，对解 u 在 ∞ 处的性态要加上限制：在 $n=2$（二维问题）时，时常要求 u 在 ∞ 附近有界；在 $n=3$ 时，则时常要求 $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=0$. 若 $\partial\Omega$ 通过 ∞ 时，Ω 是无界区域. 这不算是外部问题，其处理又有新的困难. 以下只讨论 Ω 为半平面时这一个特例.

本章只讨论拉普拉斯方程的狄利克雷问题. 从(9)式可能产生一种错觉，以为可以给出两个条件

$$u|_{\partial\Omega}=f\,,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=g\,,$$

而由(9)式有

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}g\,dS/r-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS\,. \tag{14}$$

这个结果是不正确的. 因为，只有在上述问题有解的条件下才能用(9)式得到(14)式. 因此，这只说明，若上述问题有解，则解只能是(14)，从而是唯一的. 但一般说来它是无解的，(14)虽然是调和函数，但无法验证它同时适

合两个边值条件. 但是(9) 式仍启发我们如何去解拉普拉斯方程的狄利克雷问题.

除了原来的

$$\Delta u = 0 \qquad 于 \Omega 中,$$
$$u|_{\partial\Omega} = f$$

以外，再考虑另一个狄利克雷问题：

$$\Delta v = 0 \qquad 于 \Omega 中,$$
$$v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{r(P,Q)}. \tag{15}$$

这里视 Q 为参数而 P 是动点，因此(15) 的解应依赖于 Q：$v = v(P,Q)$.

对 u 和 v 应用格林公式有

$$0 = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}[u\Delta v - v\Delta u]dx = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS .$$

将(9) 式加到此式上，注意到 $v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{r}$，$u|_{\partial\Omega} = f$，即有

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,Q)} - v(P,Q)\right]dS_P$$
$$= \iint_{\partial\Omega} f(P)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)dS_P, \tag{16}$$
$$G(P,Q) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(P,Q)} - v(P,Q)\right). \tag{17}$$

(17) 称为格林函数，它是一个有奇点的调和函数($P = Q$ 处有奇点)，而在 $\partial\Omega$ 上为 0. 它的物理意义很简单：考虑导体 $\partial\Omega$，将它“接地”，即保持此曲面上电位为 0(“地”即指零电位). 在导体曲面所包围的(中空的) 区域 Ω 内的 Q 点处放一个单位正电荷，它所产生的电位是 $-\frac{1}{4\pi r}$(即基本解)，同时它还在 $\partial\Omega$ 上感应生成另外的电荷分布，此感应电荷生成的电位为 $\frac{v(P,Q)}{4\pi}$，即有总电位 $-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - v\right)$. 因为 $\partial\Omega$ 接地，所以其上总电位必为 0，即 $v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{r}$. 所以这个总电位就是格林函数.

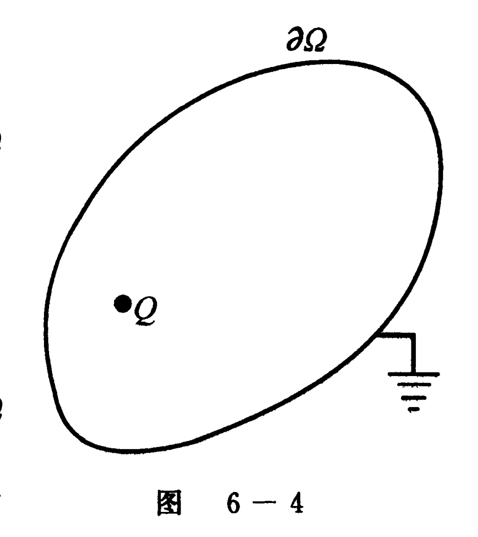


图 6－4

格林函数有许多性质，其中最重要的是其对称性. 设在 Ω 中有 Q_1，Q_2 两点，我们可证明

定理 6.2.1. 格林函数对其两个变点对称：

$$G(Q_1,Q_2)=G(Q_2,Q_1)\,. \tag{18}$$

证 在 Ω 中挖去以 Q_1，Q_2 为心、ε 为半径的两个小球(分别记为 Ω_1，Ω_2)．记余下的区域为 Ω_ε，其边界由 $\partial\Omega$，$\partial\Omega_1$，$\partial\Omega_2$ 组成．在 Ω_ε 中，$G(P,Q_1)$，$G(P,Q_2)$ 作为 P 的函数都是调和的．于是对 $u(P)=G(P,Q_1)$，$v(P)=G(P,Q_2)$ 应用(6)式．注意到 $\Delta u=\Delta v=0$ 以及在 $\partial\Omega$ 上 $u=v=0$，即有

图 6－5

$$\iint\limits_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2} G(P,Q_1)\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial r}dS_P$$

$$=\iint\limits_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2} G(P,Q_2)\frac{\partial G(P,Q_1)}{\partial r}dS_P.$$

现在令 $\varepsilon\to 0$，于是仿照(8)之法有：

$$\iint\limits_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2} G(P,Q_1)\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial r}dS_P\to G(Q_2,Q_1)\,.$$

同理

$$\iint\limits_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2} G(P,Q_2)\frac{\partial G(P,Q_1)}{\partial r}dS_P\to G(Q_1,Q_2)\,.$$

因此定理得证．

现在有两个问题：首先，求出格林函数后，(16)是否为所求的狄利克雷问题之解？因为我们是在狄利克雷问题有解的假设下得出解的公式(16)的．这个假设是否成立还有待检验．如果(16)确实是解，则这个假设得到了确认．$G(P,Q)$ 当 $P\neq Q$ 时是 P 的调和函数，但由上面证明的对称性可见，当 $Q\neq P$ 时 $G(P,Q)$ 也是 Q 的调和函数．在(16)式中，$P\in\partial\Omega$，当 $Q\in\Omega$ 时，$Q\neq P$ 自然成立，因此(16)式的被积函数是 $Q\in\Omega$ 的调和函数．利用积分号下求微商即知 $u(Q)$ 是 Ω 中的调和函数．满足边值条件的证明要困难得多．因为我们很容易看到 $\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)=O\left(\frac{1}{r^2}\right)$．因此，当 Q 从 Ω 内趋向 $\partial\Omega$ 上一点 P_1 时，将会出现形如

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{f(P)}{r^2(P,P_1)}dS_P$$

的积分．分母的次数恰好与积分区域的维数相同．所以这是一个发散积分．它是所谓的奇异积分．关于它的理论是现代数学的一个重要成果，我们在这里当然无法涉及，而只有在下面的一些特例中看一下是如何处理这个问题的．第二个问题是如何求格林函数．其实，我们是把一个一般的狄利克雷问

题化为一个特殊的狄利克雷问题(以$\frac{1}{r}$为边值)．但是物理学将启发我们怎样求解．这就是下面讲的镜象法.

2. **半平面的格林函数**　从现在起，我们限于讨论平面问题，而将 $n=3$ 时的相应问题留作习题．$n=2$ 时，拉普拉斯方程的基本解是 $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$，而(9)式成为

$$u(Q)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{r}-u\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS\ .\tag{19}$$

格林函数现在是

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(P,Q)}-v(P,Q)\right],\tag{20}$$

$$\Delta_P v(P,Q)=0\ ,\quad v|_{\partial\Omega}=\ln\frac{1}{r}\ .$$

当然，格林函数仍有对称性.

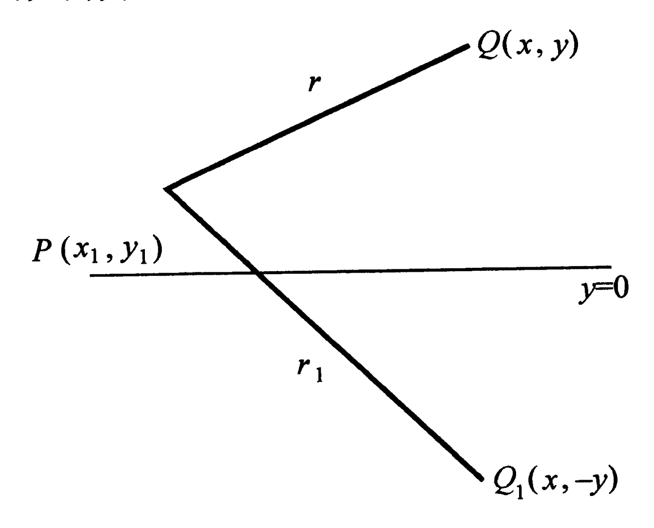


图　6－6

为了求上半平面的格林函数，我们设想除在 Q 点有一个单位正电荷外，在 Q 关于 $\partial\Omega$(即 $y=0$) 的对称点(镜象)Q_1 处放一个单位负电荷．很容易想象到，这两个电荷所产生的总电位在上半平面 Ω 中除在 Q 点外都是调和的，而在 $\partial\Omega$ 上抵消为 0．所以总电位就是格林函数．因此

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(P,Q)}-\ln\frac{1}{r(P,Q_1)}\right].\tag{21}$$

以它代入

$$u(Q)=\int_{\partial\Omega}u(P)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)dS_P.\tag{22}$$

注意到在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial y_1}$,

$$r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,$$

$$r_1^2=(x-x_1)^2+(y+y_1)^2,$$

(其中 $r = r(P,Q)$, $r_1 = r(P,Q_1)$) 以及在 $\partial\Omega$ 上 $y_1 = 0$, 即有

$$-\frac{\partial}{\partial y_1}\ln\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial y_1}\ln r = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y_1} = -(y - y_1)/r^2,$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_1}\ln\frac{1}{r_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}\ln r_1 = \frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y_1} = (y + y_1)/r_1^2,$$

因此，由(22) 式有

$$u(Q) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1,0)y dx_1/[(x - x_1)^2 + y^2].$$

因此狄利克雷问题

$$\Delta u = 0 \qquad 于 y > 0 处,$$
$$u|_{y=0} = f(x)$$

之解如果存在的话，必为

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)y dt/[(x - t)^2 + y^2]. \tag{23}$$

因此，若此问题有解，解必是唯一的. 但是我们需要考虑这个积分的收敛性. 通常我们设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续而且当 $|t| \to \infty$ 时，$f(t) = O(|t|^{-\alpha})$, $\alpha > 0$. 虽说只需设 f 有界就足够保证(23) 式当 $y > 0$ 时的收敛性，但我们仍如上作了较强的规定，其原因在下面就可以见到. 本节开始时，我们指出了，无界区域上边值问题与外问题不一样，而要有专门的处理. 这里假设 $f(t) = O(|t|^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, 就是无界问题中才出现的附加条件.

现在要证明(23) 式确实给出狄利克雷问题的解. 首先证明它是 $y > 0$ 处的调和函数. 这当然很容易直接在积分号下求微商来证明，但我们宁可采取另一个方法. 令 $z = x + iy$, 则

$$\frac{1}{\pi}\frac{y}{[(x - t)^2 + y^2]} = \frac{1}{\pi i}\frac{yi}{[(x - t)^2 + y^2]}$$
$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{[\pi i(t - z)]}.$$

因此

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(t - z)}dt. \tag{24}$$

右方的积分除相差因子 1/2 是柯西积分，因而是 z 的解析函数，其实部自然调和.

为证明它满足边值条件，不能直接在(23) 中令 $y = 0$, 因为(23) 式是在 $y > 0$ 的条件下导出的. 我们只能在其中令 $y \to 0^+$ 而证明其极限值是 $f(x)$. 以这个极限值作为 $u(x,y)$ 在 $\partial\Omega$ 上的补充定义，得到的 u 在 $\overline{\Omega}$ 上连续. 以后说狄利克雷问题的解都是指在这个意义下满足边值条件的解. 因此现证

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x) .$$

我们要注意，当 $y\to 0^+$ 时 $\dfrac{y}{\pi[(x-t)^2+y^2]}\to\delta(t-x)$. 这一点由定理 2.3.12 即可看到(不过要把离散的参数 n 换成连续的 $y>0$，但定理 2.3.4 的证明仍适用). 所以

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = \langle f(t)\ ,\ \delta(t-x)\rangle = f(x) .$$

但是 $\delta\in\mathscr{D}'$ 应作用于 $f(t)\in C_0^\infty$ 上，现在的 $f(t)$ 则不适合这个要求. 不过由定义 2.3.1 的(23) 式(对于 $l=\delta(t-x)$，应取其中 $k=0$，那里的例 2 中已讲到这一点)，可见 δ 可以推广到作用于紧支集连续函数上去. 但 $f(t)$ 连紧支集也没有，补救之法是利用单位分解. 取 $\psi(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 而在 $t=x$ 附近为 1. 于是 $\psi(t)$ 和 $1-\psi(t)$ 构成 $\mathbf{R}$ 的单位分解，令

$$f(t)=\psi(t)f(t)+[1-\psi(t)]f(t)=f_1(t)+f_2(t) .$$

$$u=u_1+u_2,$$

$$u_j(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_j(t)ydt/[(x-t)^2+y^2]\ ,\qquad j=1,2 .$$

$j=2$ 时，积分区域不包含 $t=x$ 的一个邻域，因此可以直接令 $y\to 0^+$ 而知其极限为 0. 积分区域中包含 $t=x$ 时不能这样做，因为 $y\to 0^+$ 时在 $t=x$ 处无极限. 奇异积分理论可一般地讨论这个问题，现在则可用定理 2.3.12 证明 $u_1\to f(x)$.

现在回到(24) 式. 拉普拉斯方程与解析函数有密切联系. 但是对解析函数不能提出狄利克雷问题，而只能提出：求一解析函数 $F(z)$ 使其实部适合狄利克雷条件. 这就是求共轭调和函数的问题. 但是容易看到，若 v 是 u 的共轭调和函数，$v+C$ 也是，且包括了所有共轭调和函数. 由(24) 立即可见

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt/(t-z)+iC \tag{25}$$

即所述问题的“通解”. (25) 称为许瓦兹(Schwarz) 公式(H. A. Schwarz 是德国数学家，不要把他和广义函数论的创造者法国数学家L. Schwartz 混起来). 现在可以解释为什么要设 $f(t)=O(|t|^{-\alpha})$，$\alpha>0$ 了. 因为这可以保证(25) 的收敛性. (25) 包括了两个积分：一是其实部(23)，收敛性较好；一是其虚部

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\cdot(t-x)}{[(x-t)^2+y^2]}dx,$$

收敛性较差.

3. 圆的格林函数 对于圆，什么是对称点呢？请注意，我们使用对称点是为了使当 $P\in\partial\Omega$ 时，$r=r_1$. 若圆半径是 R，作 Q_1 使 $\triangle OPQ\sim\triangle OPQ_1$，

应有 $r:R = r_1:\rho_1(\rho_1 = |OQ_1|)$，$\rho: R = R:\rho_1(\rho = |OQ|)$. 所以 Q_1 的取法是在 OQ 的延长线上取得使 $\rho_1 = R^2/\rho$. Q 与 Q_1 称为关于圆对称，如用极坐标，知若 $Q = (\rho,\theta)$，则 $Q_1 = (R^2/\rho,\theta)$，而当 $P \in \partial\Omega$ 时 $r = Rr_1/\rho_1 = \rho r_1/R$. 因此

$$G(P,Q) = -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{R}{\rho r_1}\right] \quad (26)$$

即所求格林函数. 若 P 之极坐标为 (ρ_P,θ_P)，现在

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho_P},$$

$$r^2 = \rho_P^2 + \rho^2 - 2\rho_P\rho\cos(\theta_P - \theta),$$

$$r_1^2 = \rho_P^2 + \rho_1^2 - 2\rho_P\rho_1\cos(\theta_P - \theta),$$

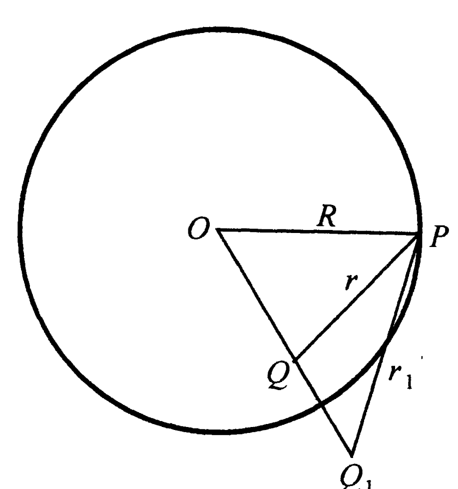


图 6－7

则

$$\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q) = \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}\frac{\rho_P}{R},$$

当 $P \in \partial\Omega$ 时，$\rho_P = R$，代入(22) 即得

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial\Omega} f(\varphi)\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2}dS$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2}d\varphi \quad (27)$$

(θ_P 改写成了 φ). (27) 称为泊松公式.

我们也要验证(27) 确是圆上狄利克雷问题的解. 它是圆内调和函数是明显的，余下的仍只是需证明它适合边值条件. 方法仍是利用定理 2.3.12. 不过要稍微修改而证明若 $F_\rho(\theta - \varphi)$ 是 $\varphi \in [0,2\pi]$ 的周期为 2π 的连续函数(即圆周上的函数)，θ 是一参数，则当适合以下两条件时必有 $\lim\limits_{\rho\to R^-} F_\rho(\theta - \varphi) = \delta(\theta - \varphi)$：

(1) 对任意 $\varphi_1,\varphi_2 \in [0,2\pi]$

$$\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta - \varphi)d\varphi\right| \leqslant C.$$

(2) 在区间 $[\varphi_1,\varphi_2]$ 上

$$\lim_{\rho\to R^-}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta - \varphi)d\varphi = \begin{cases} 1, & \theta \in [\varphi_1,\varphi_2], \\ 0, & \theta \overline{\in} [\varphi_1,\varphi_2], \end{cases}$$

证明留作习题. 现在注意 $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} = \dfrac{\partial}{\partial n}G(P,Q)$，而 $u \equiv 1$ 确为以 1 为边值的狄利克雷问题的解. 所以

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2}d\varphi.$$

因为被积函数恒非负，所以条件(1) 成立. 为证明条件(2) 成立，注意当 $\theta\,\overline{\in}\,[\varphi_1,\varphi_2]$ 时 $\cos(\theta-\varphi)\leqslant\lambda<1$，因此被积函数之分母当 $\rho\to R$ 时严格大于某正数，由分子趋于 0 即知这时积分趋于 0，而当 $\theta\in(\varphi_1,\varphi_2)$ 时

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} * = \int_0^{2\pi} * - \int_{[0,2\pi]\setminus[\varphi_1,\varphi_2]} *$$

$$= 1 - \int_{[0,2\pi]\setminus[\varphi_1,\varphi_2]} * \to 1\,.$$

由此立即有

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\to\delta(\theta-\varphi)\,.$$

4. **调和函数的另一些性质** 由泊松公式可以得到调和函数的另一些重要性质.

(1) 令 $\rho=0$ 我们又得到平均值公式.

(2) 平均值公式之逆. 设 $u(Q)\in C(\Omega)$ 满足平均值公式，重复极值原理的证明即知它在 Ω 内任一闭区域上满足极值原理. 在 Ω 内任取一圆 B 使 $\overline{B}\subset\Omega$，以 $u|_{\partial B}$ 为边值求解狄利克雷问题，利用泊松公式可得其解 v. 在 $\overline{B}$ 内任一个圆(不是 Ω 内之任一圆，因为 v 在 $\overline{B}$ 外无定义) 上，$u-v$ 满足平均值公式，因此必在圆周上达到最大与最小值. 现在就考虑 $\overline{B}$，因为 $u-v|_{\partial B}=0$，所以 $u\equiv v$ 于 B 中. 即是说 u 在 Ω 内的任一圆中都是调和的，从而在 Ω 内是调和的.

(3) 可去奇点定理. 调和函数和解析函数类似有可去奇点定理. 但 $n=2$ 与 $n=3$ 情况不同. 当 $n=2$ 时，若 $u(Q)$ 在 A 点(设为原点) 附近(但 A 点可能除外) 调和，而且

$$u(Q)=o(1)\ln r(A,Q)\,, \tag{28}$$

则可以补充 $u(Q)$ 在 A 之值使 u 在包括 A 点在内的 A 的某邻域中调和. 证明如下:作以 A 为心、R 为半径的小圆 B 含于此邻域中. 令

$$v_\varepsilon(Q)=\varepsilon[\ln(1/r(A,Q))-\ln(1/R)]\,,$$

v_ε 在外圆半径为 R、内圆半径为 $\delta>0$ 的环中调和，在 ∂B 上为 0 而在 B 内 >0. 再用 $u|_{\partial B}$ 为边值作调和函数 u_1(用泊松公式)，于是 $w\equiv u-u_1$ 在 $B\setminus\{A\}$ 中调和，在 ∂B 上为 0. 现将 w 与 v_ε 比较，并证明在任一固定点 $Q_1\neq A$ 处 $|w|\leqslant v_\varepsilon$ 对任意 ε 成立. 事实上，对任意 ε，只要取 δ 充分小，则一方面由(28) 式可以使在内圆圆周上 $|w|\leqslant v_\varepsilon$. 但在 ∂B 上 w 与 v_ε 皆为 0，故由极值原理，在 D 内 $|w|\leqslant v_\varepsilon$. 而在 Q_1 点此式也成立. 不论 ε 取何值，适当取 δ，这总是可以作到的. 因此令 $\varepsilon\to0$ 即知 $w\equiv0$，$u\equiv u_1$. 以 $u_1(A)$ 作为 $u(A)$ 之补充定义而定理得证.

$n=3$ 时证明与此相同，但(28) 应改为

$$u(Q)=o(1)(1/r(A,Q)) . \tag{29}$$

(4) 调和函数的解析性. 本章开始我们定义调和函数是 $\Delta u=0$ 的 C^2 解. 但实际上调和函数有更高的光滑性，它自动地成为(x,y) 的解析函数. 这并不是说它是 $x+iy$ 的解析函数，因为复变量的解析函数除恒等于常数外不会是实值函数，而我们讨论的调和函数则是实值的(否则就不会有极值原理了). 我们说调和函数是(x,y) 的解析函数，是指它在每一点(设为$(0,0)$)附近可以展成 x,y 的幂级数：

$$u(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}x^m y^n.$$

原因是，若以 u 在$(0,0)$ 为心、R 为半径的圆周上之值为边值，则 u 可以用泊松公式表示. 但是

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}$$

$$=\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+(x^2+y^2)}$$

当(x,y) 在$(0,0)$ 附近时确实可以展开为(x,y) 的幂级数. 代入泊松公式即得调和函数的幂级数展开式.

不但如此，当 $n=3$ 时，调和函数 $u(x,y,z)$ 也是(x,y,z) 的解析函数. 对任意多个自变量情况也都如此. $\Delta u=0$ 的 C^2 解如此，其 $\mathscr{D}'$ 解又如何呢? 下面将证明，$\Delta u=0$ 的所有 $\mathscr{D}'$ 解都是 C^∞ 解，因此也都是解析的.

(5) 刘维尔(Liouville) 定理. 解析函数有一个重要性质：在整个复平面上解析的函数若为有界则必恒为常数. 对调和函数也如此：在全空间 $\mathbf{R}^n$ 上调和且有界的函数必恒为常数(Liouville 定理). 证明它只需平均值公式就够了. 分别记以 0 和 x 为心、R 为半径的球为 $B_R(0)$，$B_R(x)$. 它们的体积皆相同，为 $|B_n|=C_nR^n$. 利用体积平均值公式(见上节习题 6，它在 n 维情况也成立)，有

$$|u(x)-u(0)|=|B_n|^{-1}\left|\int_{B_R(x)}u(y)dy-\int_{B_R(0)}u(y)dy\right|$$

$$\leqslant|B_n|^{-1}\iint_{B_R(x)\triangle B_R(0)}|u(y)|dy .$$

这里 $B_R(x)\triangle B_R(0)$ 是对称差：$[B_R(x)\backslash B_R(0)]\cup[B_R(0)\backslash B_R(x)]$ (图 6－8). 记 $\|u\|_\infty=\sup|u(y)|$，有

$$|u(x)-u(0)|\leqslant\|u\|_\infty|B_n|^{-1}\left(\int_{|y|<R,|y-x|>R}dy+\int_{|y|>R,|y-x|<R}dy\right)$$

$$\leqslant\|u\|_\infty|B_n|^{-1}\int_{R-|x|<|y|<R+|x|}dy$$

$$= \|u\|_\infty |B_n|^{-1} C_n[(R+|x|)^n - (R-|x|)^n]$$
$$= O(1/R).$$

令 $R \to \infty$ 即有 $u(x) = u(0)$.

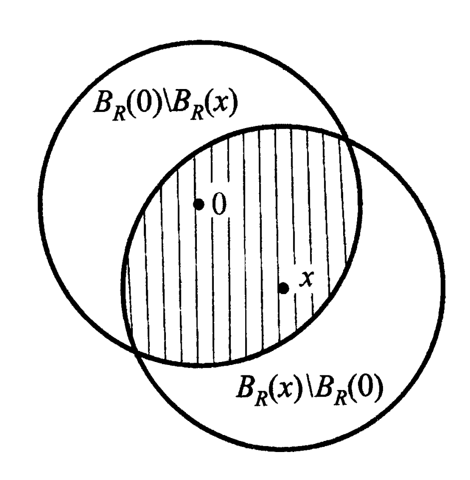


图　6－8

(6) 哈纳克(Harnack)定理. 设 $\{u_n(Q)\}$ 是 Ω 中的调和函数序列，而且在 Ω 中一致收敛于 $u(Q)$，则 $u(Q)$ 也是 Ω 中的调和函数. 证明很简单. 作一个圆 $B \subset \Omega$，则 u_n 在 ∂B 上也一致收敛于 u. 在泊松公式中求极限即得.

(25) 式把半平面上的格林函数与柯西积分核 $1/(t-x)$ 联系起来. (27) 式其实也是一样. 记 $\partial\Omega$(现在是以 $(0,0)$ 为心 R 为半径的圆周) 上之点为 $t = Re^{i\varphi}$，Ω 内的点为 $z = \rho e^{i\theta}$，则

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2} = \frac{|t|^2-|z|^2}{|t-z|^2}$$
$$= \mathrm{Re}\,\frac{t+z}{t-z}.$$

因此也很容易解决以下问题：已知圆内解析函数 $f(z)$ 之实部在圆周上的值，求此解析函数. 其通解为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(t)\,\frac{t+z}{t-z}\,d\varphi + iC, \tag{30}$$

C 是任意实常数. 它是在圆上的许瓦兹公式.

习　　题

1. 设 $G(P,Q)$ 为格林函数，证明：

(1) $0 < -G(P,Q) < \dfrac{1}{r(P,Q)}$，　当 $P \neq Q$，$P,Q \in \Omega$.

[提示：考虑(15)并应用极值原理.]

(2) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n} dS_P = 1$.

[提示：考虑(16)，取 $u \equiv 1$.]

2. 用镜象法求第一象限的格林函数.

3. 求半圆域的格林函数.

4. 当 $n = 3$ 时，求上半空间 $\{(x,y,z);\ z > 0\}$ 以及球 $\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 < R^2\}$ 的格林函数. 并给出相应的狄利克雷问题的解.

5. 证明定理 2.3.12 的修改：若 $F_\rho(\theta-\varphi)$ 是 $\varphi \in [0,2\pi]$ 的周期为 2π 的连续函数，而且：

(1) 对任意 $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,2\pi]$

$$\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta-\varphi)d\varphi\right| \leqslant C,$$

(2) $\lim\limits_{\rho\to R^-}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta-\varphi)d\varphi = \begin{cases} 1, & \varphi\in(\varphi_1,\varphi_2); \\ 0, & \varphi\overline{\in}[\varphi_1,\varphi_2], \end{cases}$

则 $\lim\limits_{\rho\to R^-} F_\rho(\theta-\varphi) = \delta(\theta-\varphi)$.

6. 证明哈纳克不等式：设 u 在以 Q 为心 R 为半径的圆 B 内非负调和，而在 $\overline{B}$ 上连续，则

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(Q) \leqslant u(P) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q).$$

$P\in B$ 是 B 内任意点，$\rho=|PQ|$.

7. 证明以下更一般的哈纳克不等式：

(1) 设 $u\geqslant 0$ 是 Ω 中的调和函数，$B_{4R}(Q)\subset\Omega$，证明对 $B_R(Q)$ 中任二点 P_1、P_2 有

$$u(P_1) = |B_R|^{-1}\int_{B_R(P_1)} u(x)dx \leqslant |B_R|^{-1}\int_{B_{2R}(P_1)} u(x)dx,$$

$$u(P_2) = |B_{3R}|^{-1}\int_{B_{3R}(P_2)} u(x)dx \geqslant |B_{3R}|^{-1}\int_{B_{2R}(P_1)} u(x)dx.$$

(2) 利用(1) 证明

$$\sup_{B_R(Q)} u \leqslant 3^n \inf_{B_R(Q)} u.$$

(3) 证明一般的哈纳克不等式：设 $u\geqslant 0$ 在 Ω 中调和，$K\subset\subset\Omega$ 是 Ω 的连通紧子集，必可找到一个只与 n,K,Ω 有关的常数 C 使

$$\sup_K u \leqslant C\inf_K u.$$

8. 证明 $n=3$ 时的可去奇点定理.

9. 设 Ω 是有界连通开集，$O\in\Omega$，$\varphi\in C(\overline{\Omega})$，$u(x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 满足方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi; \end{cases}$$

而 $v(x)$ 是定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \Omega\backslash O, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的有界解，证明：　$u(x)=v(x)$，　于 $\Omega\backslash O$.

10. 设 Ω 是有界连通开集，$O\in\Omega$，证明不存在这样的函数 $u(x)$，它在 $\overline{\Omega}$ 上连续，在 $\Omega\backslash O$ 上调和，并且在 $\partial\Omega$ 上满足：$u(x)<r<u(O)$.

11. 设 S_R^2 是以 R 为半径的二维球面，球心在原点. 若 Q_1，Q_2 位于过圆心的同一半射线上且 $OQ_1\cdot OQ_2=R^2$，则称 Q_1,Q_2 对该球面对称(互为反演). 证明：若 u 在球内调和，则 $u_1(P)=\dfrac{1}{r}u(Q)$(Q 与 P 互为反演)是球外的调和函数，这里 $r=|OP|$. $u\mapsto u_1$ 称为开尔文(Kelvin) 变换.

11. 证明开尔文变换之逆：若 $u_1(P)$ 在球外调和，而且 $\lim\limits_{\rho\to\infty}u_1(\rho)=0$，则其开尔文变换 $u(Q)=\dfrac{1}{r}u_1(P)$，$r=|OQ|$ 在球内(包括 O 点) 调和.

§3. 关于一般椭圆型偏微分方程解的正则性分析

上面几节中我们都只讨论$\Delta u=0$的C^2解，而§2中证明了这些解都是解析的(从而也都是C^∞解). 这并不是偶然的事. 在建立广义函数时，我们以C_0^∞为基本空间而得到了容许很高奇异性的对象(如δ函数). 所以，研究广义函数时，一个核心问题是讨论奇异性. 为此，就有必要对什么是奇异性划一条清楚的界限. 简单地说，由于我们是在C^∞框架中讨论广义函数的，所以，凡是破坏了C^∞性质就称为奇异性，而保持C^∞性质就称为正则性. 第二章中给出广义函数奇支集定义时，我们就是这样做的. 与之相比，如果我们是在解析函数框架中讨论问题，破坏解析性就是奇异性，保持解析性就称为正则性. 在复分析课程中，我们就是这样做的.

我们现在要证明$\Delta u=0$的广义函数解的奇支集为空. 这件事与拉普拉斯方程基本解的奇性分布有关. 不论在$n=2$或$n>2$时，基本解$C\ln\left(\frac{1}{r}\right)$或$Cr^{2-n}$的奇支集都是一个孤立点$\{r=0\}$. 现在我们给出如下的定义：

定义 6.3.1 若C^∞系数的线性偏微分算子$P=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha$具有以下的性质就称$P$是亚椭圆的：对任意$u\in\mathscr{D}'$, sing supp $u\subset$ sing supp Pu. 换句话说：P是亚椭圆的当且仅当对任意开集$\Omega\subset\mathbf{R}^n$及任意$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，由$Pu\in C^\infty$可得$u\in C^\infty(\Omega)$(请读者作为习题证明).

因此，若E是亚椭圆算子P的基本解：$PE=\delta$，则因sing supp $PE=$ sing supp $\delta=\{0\}$，所以sing supp $E\subset\{0\}$. 重要的是，若P还是常系数算子，上述结果的逆也成立.

定理 6.3.2. 设P为常系数线性偏微分算子，而且有一基本解$E(x)$使sing supp $E=\{0\}$，则P必为亚椭圆的.

证 设$u\in\mathscr{D}'$，对任意$x\overline{\in}$ sing supp Pu，必存在x的ε邻域$B_\varepsilon(x)$，使得$\overline{B_\varepsilon(x)}\cap$ sing supp $Pu=\varnothing$. 令$\varphi\in C_0^\infty(B_\varepsilon(x))$，且$\varphi|_{B_{\varepsilon/2}(x)}=1$，则$\varphi Pu\in C_0^\infty$，而$P(\varphi u)=\varphi Pu+v$，$v$中各项皆含有$\varphi$的不低于1阶的微商作为因子，故在$B_\varepsilon(x)$外及$B_{\varepsilon/2}(x)$内$v=0$. 现在

$$E*P(\varphi u)=E*(\varphi Pu)+E*v,$$

其中$E*(\varphi Pu)$由定理3.1.3知为C^∞函数，对第二项，因定理3.2.3有

$$\text{sing supp}(E*v)\subset\text{sing supp }v+\{0\}=\text{sing supp }v\subset\text{supp }v.$$

因此$E*v$在$B_{\varepsilon/2}(x)$上是C^∞的，但另一方面

$$E*P(\varphi u)=P(E*(\varphi u))=(PE)*(\varphi u)=\delta*(\varphi u)=\varphi u,$$

所以 φu 在 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 上是 C^∞ 的，即 $x \overline{\in}$ sing supp u. 于是

$$\text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu,$$

P 为亚椭圆的.

把这个结果用于拉普拉斯方程即知 Δ 是亚椭圆的. 特别是可以得到著名的外尔 — 许瓦兹(Weyl-Schwartz) 引理：

定理 6.3.3. $\Delta y = 0$ 的一切 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 解皆为 $C^\infty(\Omega)$ 解.

但这个定理只说明 u 在 Ω 的内点光滑，而在 $\partial\Omega$ 上 u 可能有很高的奇性.

本节讲的结果对一般 C^∞ 系数的椭圆型算子也是成立的：即它们都是亚椭圆算子. 例如，对 m 阶常系数线性偏微分算子 $P(D)$，如果它是椭圆算子，即当 $\xi \neq 0$ 时其主象征 $P_m(\xi) \neq 0$，因此在单位球面 $\{\xi; |\xi| = 1\}$ 上，$\min\limits_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| = C > 0$. 由于 $P_m(\xi)$ 是 ξ 的 m 次齐性多项式，故 $|P_m(\xi)| \geqslant C|\xi|^m$. 首先我们有

引理 6.3.4 设 $P(D)$ 是 m 阶常系数椭圆算子，必存在常数 $R > 0$，使全象征 $P(\xi)$ 的零点全在 $\{\xi; |\xi| \leqslant R, \xi \neq 0\}$ 内.

证 将 $P(\xi)$ 按各项次数分组而得

$$P(\xi) = P_m(\xi) + P_{m-1}(\xi) + \cdots + P_0(\xi),$$

$P_{m-k}(\xi)$ 是 ξ 的 $m-k$ 次齐性多项式，因此

$$|P(\xi)| \geqslant |P_m(\xi)| - (|P_{m-1}(\xi)| + \cdots + |P_0(\xi)|)$$

$$\geqslant C|\xi|^m - M|\xi|^{m-1} = C|\xi|^{m-1}\left(|\xi| - \frac{M}{C}\right).$$

令 $R = M/C$ 即知当 $|\xi| > R$ 时 $P(\xi) \neq 0$. 引理证毕.

现在考虑 $P(D)$ 的基本解 $E \in \mathscr{S}'$，则 E 的傅里叶变换 $\hat{E} \in \mathscr{S}'$，由 $P(D)E = \delta$，知 $\hat{E} = \frac{1}{P(\xi)}$，但是 $P(\xi)$ 的零点使得很难求 $\frac{1}{P(\xi)}$ 的逆傅里叶变换. 但由引理知其所有 $P(\xi)$ 的零点在 $|\xi| \leqslant R$ 内，故若作 $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使在 $|\xi| \leqslant R$ 上 $\chi(\xi) \equiv 1$，则可令 $E_1 = F^{-1}[(1-\chi(\xi))/P(\xi)]$，显然 $E_1 \in \mathscr{S}'$. 于是 $P(D)E_1(x) = F^{-1}((P(D)E_1)^\wedge) = F^{-1}(1-\chi(\xi)) = \delta(x) - (F^{-1}\chi)(x)$. 其中 $F^{-1}\chi \in \mathscr{S}$，这样，虽然 $E_1(x)$ 不是基本解，却也“相差不多”，不妨称为“拟基本解”. 对拟基本解 E_1，我们有

定理 6.3.5 设 $P(D)$ 是 m 阶常系数椭圆算子，E_1 为其拟基本解，则

$$\text{sing supp } E_1 = \{0\}. \tag{31}$$

证 记 $\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} = r(\xi)$，则 $r \in C^\infty \cap \mathscr{S}'$，且由上一引理证明中知 $|r(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{1-m}$. 再由 $P_{m-k}(\xi)$ 的齐性. 可以证明对任意重指标 α，存在常数 C_α，使得

$$|D_\xi^\alpha r(\xi)| \leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^{1-m-|\alpha|}.$$

对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$，计算

$$\begin{aligned}&\langle D_x^\beta(x^\alpha F^{-1}(r)(x)\ ,\ \varphi\rangle\\&=(-1)^{|\beta|}\langle r\ ,\ F^{-1}(x^\alpha D_x^\beta\varphi)\rangle\\&=(-1)^{|\beta|}\langle r\ ,\ (-D_\xi^\alpha)(\xi^\beta\check{\varphi}(\xi))\rangle\\&=(-1)^{|\beta|}\langle F^{-1}(\xi^\beta D_\xi^\alpha r)\ ,\ \varphi)\rangle\ ,\end{aligned}$$

所以

$$D_x^\beta(x^\alpha F^{-1}(r)(x))=(-1)^{|\beta|}F^{-1}(\xi^\beta D_\xi^\alpha(r)(\xi))(x)\ ,$$

而

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha r(\xi)|<C_\alpha(1+|\xi|)^{1-m+|\beta|-|\alpha|}.$$

对任意 j，取 $|\beta|=j$，$|\alpha|>1-m+|\beta|+n=1-m+j+n$. 则 $\xi^\beta D_\xi^\alpha r$ 是在 $\mathbf{R}^n$ 上绝对可积函数，因此 $F^{-1}(\xi^\beta D_\xi^\alpha r)(x)$ 是连续函数，即可得 $x^\alpha F^{-1}(r)(x)\in C^j$，这便可得 $F^{-1}(r)(x)$ 在 $x\neq0$ 时是 C^∞ 的，即有

$$\text{sing supp }F^{-1}(r)=\{0\}\ .$$

定理证毕.

利用此定理，在定理 6.3.2 的证明中以拟基本解 E_1 代替 E，便可得到同样的结论. 即

定理 6.3.6　常系数椭圆算子是亚椭圆的.

对 C^∞ 变系数椭圆算子，也可以利用拟基本解证明其亚椭圆性. 不过，那时的拟基本解比常系数情况复杂得多.

§4. 一般区域内拉普拉斯方程边值问题简介

1. **应用积分方程方法**　上一节中我们通过格林函数解决了一些特殊区域中拉普拉斯方程的狄利克雷问题. 对于一般的区域或其他边值条件问题又如何？解决这些问题的途径之一仍是利用基本解. 从(9)式知拉普拉斯方程的解可写成由边值 $u|_{\partial\Omega}$ 及 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ 和基本解构造的单层位势及双层位势之和. 但对拉普拉斯方程只能给一个边值条件，所以我们设 u 只是单层位势或双层位势，例如对狄利克雷问题，可设其解 u 为双层位势

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\partial_{n_y}E(x,y)\varphi(y)dS_y.\tag{32}$$

当然，φ 不一定是 $u(x)$ 的边值，是待定的未知函数(假设它在边界 $\partial\Omega$ 上连续). 由于 $E(x,y)$ 为拉普拉斯方程的基本解，记 $\partial_{n_y}E(x,y)=K(x,y)$，则可

证明(这里不证)$K(x,y)$ 有如下性质：

$$\int_{\partial\Omega} K(x,y)dS_y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in \Omega; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } x \in \partial\Omega; \\ 0, & \text{当 } x \overline{\in} \overline{\Omega} \end{cases} \tag{33}$$

及

$$K(x,y) = O(|x-y|^{n-2}), \qquad \text{于 } \partial\Omega \times \partial\Omega, \tag{34}$$

并且还可进一步证明存在常数 C，使得

$$\int_{\partial\Omega} |K(x,y)| dS_y \leqslant C. \tag{35}$$

记 $u_-(x) = \lim\limits_{t\to 0^-} u(x+t\boldsymbol{n}(x))$，$u_+(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} u(x+t\boldsymbol{n}(x))$，$x \in \partial\Omega$，$\boldsymbol{n}(x)$ 为 x 处 $\partial\Omega$ 之单位外法向量，于是 我们有

定理 6.4.1 假设 $\varphi \in C(\partial\Omega)$，$u(x)$ 由(32) 所确定，则

$$u_-(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x,y)\varphi(y)dS_y, \tag{36}$$

$$u_+(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x,y)\varphi(y)dS_y. \tag{37}$$

证 设 $x \in \partial\Omega$，而 $t < 0$ 充分小，则 $x + t\boldsymbol{n}(x) \in \Omega$，于是，由(33)，

$$\begin{aligned} u(x+t\boldsymbol{n}(x)) &= \varphi(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_y} E(x+t\boldsymbol{n}(x),y)dS_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_y} E(x+t\boldsymbol{n}(x),y)(\varphi(y)-\varphi(x))dS_y \\ &= \varphi(x) + \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_y} E(x+t\boldsymbol{n}(x),y)(\varphi(y)-\varphi(x))dS_y. \end{aligned}$$

而第二项积分在 $t=0$ 是连续的(作为习题)．于是，令 $t \to 0$ 可得

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \varphi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x,y)\varphi(y)dS_y - \varphi(x)\int_{\partial\Omega} K(x,y)dS_y \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x,y)\varphi(y)dS_y. \end{aligned}$$

若取 $t > 0$，同理可证(37)．定理证毕．

根据 u 的边值条件 $u|_{\partial\Omega} = f$，由(36) 可以得到关于 φ 的一个算子方程：

$$\frac{1}{2}\varphi + T_K\varphi = f. \tag{38}$$

T_K 是一个以 $K(x,y)$ 为核的积分算子．可以用积分方程理论处理它，也可以用泛函分析的一般理论来讨论．有兴趣的读者可以参看彼得罗夫斯基著、段虞荣译《偏微分方程讲义》(高等教育出版社) 或[美] Gerald B. Folland 著、齐民友等译《偏微分方程引论》(高等教育出版社)．

2. **变分方法** 现在介绍另一种方法——变分法的思想. 在第二章§1讨论了弦振动的哈密顿原理，现在再看另一类物理问题. 若 u 是 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 中的电场电位，则它应使位能

$$E(u)=\iint_\Omega(u_x^2+u_y^2)dxdy \tag{39}$$

在某一函数集 M 中达到最小. 在考虑狄利克雷问题时应要求 u 适合边值条件 $u|_{\partial\Omega}=f$，这就成为定义 M 的条件之一；其他的条件则是 u 应具有某种光滑性等等. 经典的变分学把这一极值问题化为微分方程问题. 实际上若 $u_0\in M$ 使 $E(u)$ 达到极小，令 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$u_0+\lambda\varphi$ 仍适合边值条件，从而至少对充分小的 λ，$E(u_0+\lambda\varphi)\geqslant E(u_0)$. 即是说 $F(\lambda)=E(u_0+\lambda\varphi)$ 当 $\lambda=0$ 时有极小值，因此 $F'(0)=0$，但

$$F(\lambda)=\iint_\Omega(u_{0x}^2+u_{0y}^2)dxdy+2\lambda\iint_\Omega(u_{0x}\varphi_x+u_{0y}\varphi_y)dxdy$$
$$+\lambda^2\iint_\Omega(\varphi_x^2+\varphi_y^2)dxdy.$$

所以 $F'(0)=0$ 给出

$$\iint_\Omega(u_{0x}\varphi_x+u_{0y}\varphi_y)dxdy=0\,. \tag{40}$$

用格林公式可得

$$\iint_\Omega(\Delta u_0)\varphi\,dxdy=0\,,\qquad\forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

所以 $\Delta u_0=0$，而 u_0 即所求狄利克雷问题的解. 所以，要想求 u_0 是使得泛函 $E(u)$ 取极小，即 $\min\limits_{u\in M}E(u)=E(u_0)$，只要解一个狄利克雷问题即可. 这种化极值问题为微分方程的问题的作法我们在第一章中即已看到. 但这个方法还可以从另一个角度来看，把求解微分方程的边值问题化为求解一个变分问题：为了求上述狄利克雷问题，首先直接求 $E(u)$ 的极值. 事实上，因 $E(u)\geqslant0$，所以一定存在下确界 $\inf\limits_M E(u)=d$. 如果求出了 $u_0\in M$ 使 $E(u_0)=d$，则 u_0 是狄利克雷问题的解. 黎曼(Riemann)从这样的想法出发提出狄利克雷原理：取

$$M=\{u\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\,;\ u_x^2,\ u_y^2\text{ 在 }\Omega\text{ 中可积},\ u|_{\partial\Omega}=f\}\,.$$

一定有一个序列 $\{u_n\}\subset M$ 使狄利克雷形式 $E(u_n)\to d$. 黎曼认为 $\{u_n\}$ 应有极限 u_0，使得 $E(u_0)=d$. 变分问题之解 u_0 即狄利克雷问题之解.

这个想法在物理上有坚实的基础，但在数学上有重大缺陷：维尔斯特拉斯(Weierstrass)指出，$E(u)$ 在 M 中有下确界，并不意味着 $E(u)$ 在 M 中可以达到其下确界而得最小值，即不一定存在 u_0 使 $E(u_0)=d$. 可以举一个例子来说明它. 设 $M=\{u\in C^1(\overline{\Omega}),\ \overline{\Omega}=[-1,1],\ u(-1)=-1,\ u(1)=1\}$，

$E(u)=\int_{-1}^{1}x^2u_x^2dx$. 这时 $E(u)\geqslant 0$. 若令 $u_\varepsilon=\dfrac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$，易见 $u_\varepsilon\in M$，而且

$$\begin{aligned}E(u_\varepsilon)&\leqslant\int_{-1}^{1}(x^2+\varepsilon^2)(u_\varepsilon')^2dx\\&=\frac{\varepsilon^2}{\arctan^2(1/\varepsilon)}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}\\&=2\varepsilon/\arctan\frac{1}{\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

所以，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$E(u_\varepsilon)\to 0$ 而有 $0=\inf\limits_{M}E(u)$. 但若有一个 $u_0\in M$ 使 $E(u_0)=0$，必有 $u_0'\equiv 0$，而 $u\equiv$ 常数，但任意常数都不可能适合这里的边值条件.

虽然黎曼的推理有这样的缺陷，由于狄利克雷原理在物理上是这样有力，所以它仍然吸引着人们. 一直到1900年，希尔伯特(Hilbert)才找到了这个原理的准确提法而且证明了它. 这在偏微分方程的历史上是一件大事.

进一步分析这个作法还看到另一些重大问题. 首先，即令 $E(u_n)\to d$，$\{u_n\}$(称为极小化序列)在什么意义下收敛？这时，只好把 $E(u)$ 本身作为一种度量，而且认为 $E(u_n-u_0)\to 0$ 就是 u_n 在此度量下趋于 u_0. 这就是采用能量作为度量，这在物理上是很自然的. 我们在第八章中还要遇到它. 问题在于，是否由 $E(u_n)\to d$ 就能保证在 M 中找到 u_0 使 $E(u_n-u_0)\to 0$？而且 u_0 又恰好有必要的光滑性以在古典意义下解决边值问题呢？一般说是不行的. 为此就要扩大 M，加进新的对象. 用数学语言来表达，即要求将 M 在上述度量下完备化，但完备化以后加进去的新对象不一定具有必需的光滑性来适合 $\Delta u_0=0$. 为此就有必要推广微商的定义使得可以说 u_0 是狄利克雷问题的广义解. 然后，我们可以再进一步分析广义解的正则性(如定理6.3.3)，以便证明广义解在适当条件下会成为古典解. 当然，所有这一切都需要经过细致的努力. 经过完备化所得到的函数空间就是著名的索伯列夫(соболев, Sobolev)空间，这是一类广义函数空间. 所以，广义函数空间，更准确地说是索伯列夫空间，是变分方法自然的框架. 例如关于一类索伯列夫空间 $H^1(\Omega)$ 我们有

定义 6.4.2 我们用 $H^1(\Omega)$ 表示一切 $u\in L^2(\Omega)$，且其一阶广义微商 $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\in L^2(\Omega)(j=1,2,\cdots,n)$ 的函数的全体所组成的集合，即

$$H^1(\Omega)=\left\{u;\,u,\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L^2(\Omega),\,j=1,2,\cdots,n\right\}. \tag{41}$$

并规定其范数

$$\|u\|_1=\left[\int_\Omega u^2+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{42}$$

称 $H^1(\Omega)$ 为索伯列夫空间.

根据上述范数可在 $H^1(\Omega)$ 中引入内积，并且能证明它是完备的，因而 $H^1(\Omega)$ 是希尔伯特空间. 其他的索伯列夫空间也可以类似地定义.

前面已经知道求 $E(u)$ 极小这个变分问题等价于求方程(40) 的解 $u_0 \in M$，而变分问题的解不一定在 M 内，它可能在 M 的完备化空间内，于是这完备化空间内变分问题的解就称为方程(40) 的适合条件 $u|_{\partial\Omega} = f$ 的边值问题之广义解. 记 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_1$ 下的完备化为 $H_0^1(\Omega)$，同样可证明它也是希尔伯特空间. 更准确地说，我们需要给定在 $\partial\Omega$ 上的函数 f 可以向 Ω 延拓成 $\tilde{f}$ (当然也看作已知的)：$\tilde{f} \in H^1(\Omega)$，且 $\tilde{f}\,|_{\partial\Omega} = f$. 令 $w = u - \tilde{f}$，则 $w \in H_0^1(\Omega)$. 并且记

$$D(u,v) = \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx dy \ , \qquad u,\ v \in H_0^1(\Omega) \ . \tag{43}$$

则(40) 化为由方程

$$D(w,v) = - D(\tilde{f},v) \ , \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{44}$$

求解 $w \in H_0^1(\Omega)$，而 $u = w + \tilde{f} \in H^1(\Omega)$ 就称为原狄利克雷问题的广义解. 其存在唯一性可以利用泛函分析中的 Lax－Milgram 定理来证明.

定理 6.4.3 (Lax-Milgram) 设 H 是一是希尔伯特空间，$B(u,v)$ 是 H 上的双线性形式，具有性质：

(1) 对称性，即 $B(u,v) = B(v,u)$；

(2) 有界性，即 $|B(u,v)| \leqslant M\|u\| \cdot \|v\|$，$0 < M < \infty$；

(3) 正定性，即 $B(u,u) \geqslant \gamma\|u\|^2$，$\gamma > 0$.

又设 $F(v)$ 是 H 上的有界线性泛函，则存在唯一 $u_0 \in H$，使得

$$B(u_0,v) = F(v) \ , \qquad \forall\, v \in H$$

成立. 且有估计

$$\|u_0\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\|F\| \ .$$

以 $D(w,v)$ 代替 $B(w,v)$，以 $D(\tilde{f},v)$(其中 $\tilde{f}$ 为已知固定的) 代替 $F(v)$，则可得到原狄利克雷问题的广义解的存在唯一性及稳定性.

索伯列夫空间在偏微分方程各部门中都有极为广泛的应用. 可以用它为基础来展开本课程的内容. 读者可以参看姜礼尚、陈亚浙编：《数学物理方程讲义》(高等教育出版社，1986). 更进一步还可以看 O. A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer-Verlag, 1983.

第七章　抛物型方程

§1. 柯西问题

1. 热传导方程的基本解　由基本解的定义，热传导方程的基本解 $K(x,t)$ 应满足方程

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)K(x,t) = \delta(x,t) . \tag{1}$$

如果设 $K(x,t) \in \mathscr{S}'$ 而对(1)式两边作傅里叶变换，则有

$$\hat{K}(\xi,\tau) = (i\tau + |\xi|^2)^{-1}, \tag{2}$$

其中(ξ,τ)为(x,t)的对偶变量. 但是求(2)式的傅里叶逆变换并不容易，所以我们用另一个方法，即只对 x 进行傅里叶变换(t 作为参数)：

$$F_x(K) = \tilde{K}(\xi,t) , \tag{3}$$

称其为部分傅里叶变换. 而由第四章例 4 及(1)式可得 $\tilde{K}(\xi,t)$ 的常微分方程(在广义微商意义下)

$$\frac{d\tilde{K}}{dt} + |\xi|^2\tilde{K} = \delta(t) , \tag{4}$$

ξ 看作参数. 按第五章 § 2 习题 1 的方法，令

$$\tilde{K} = e^{-|\xi|^2 t}u(\xi,t) ,$$

注意到 $e^{|\xi|^2 t}\delta(t) = \delta(t)$，即得

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) , \tag{5}$$

考虑到我们要求 $K \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{n+1}_{x,t})$，则应该要求 $\tilde{K} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{n+1}_{\xi,t})$. 为此需要 $u(\xi, -\infty) = 0$. 否则 $e^{-|\xi|^2 t}u(\xi,t)$ 当 $t \to -\infty$ 时会有指数增长而不可能在 $\mathscr{S}'$ 中(见第四章定理 4.1.9 后的说明). 所以

$$u(\xi,t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1, & \text{当 } t > 0 , \\ 0, & \text{当 } t < 0 . \end{cases} = H(t) . \tag{6}$$

从而

$$\tilde{K}(\xi,t) = H(t)e^{-|\xi|^2 t}. \tag{7}$$

对 ξ 作傅里叶逆变换，应用高斯函数的傅里叶变换公式即得

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}H(t)\exp[-|x|^2/4t]. \tag{8}$$

这里我们应特别注意因子 $H(t)$. 因它的出现使得当 $t<0$ 时有 $K(x,t)\equiv 0$. 这表明利用这个基本解，只能解 $t>0$ 时的柯西问题. 这反映了热传导过程是一个不可逆过程：由初始时刻 $t=0$ 的数据求过去时刻 $t<0$ 的解是不可能的.

由(8)式可见，当 $t>0$ 时，$K(x,t)\in C^\infty$，若 $t\to 0$，则当 $x\neq 0$ 时，$K(x,t)$ 无限阶为 0. 连同 $K(x,t)\equiv 0$ 于 $t<0$ 处可知，$\text{sing supp}K(x,t) = \{0\}\in \mathbf{R}^{n+1}$ (这里设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，再加时间 t 共 $n+1$ 个变量). 所以由第六章定理 6.3.2 可知热传导算子是亚椭圆的. 因此热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

在 $t>0$ 处的 $\mathscr{D}'$ 解都是 C^∞ 解.

2. 柯西问题的解 考虑柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & t>0; \\ u|_{t=0} = f(x). \end{cases} \tag{9}$$

暂设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界连续函数，我们现证明它的解是

$$u(x,t) = K(x,t) \underset{(x)}{*} f(x) = (4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)\exp[-|x-\xi|^2/4t]d\xi. \tag{10}$$

这里 $\underset{(x)}{*}$ 表示对变元 x 作卷积. 注意 $K(x,t)$ 和 $f(x)$ 虽然都没有紧支集，但(10)式中的积分显然是存在的.

证明(10)式满足热传导方程是容易的. 可以直接在积分号下求微商得知，同时由卷积的性质也有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)K * f &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)K\right] * f \\ &= \delta(t,x) * f \\ &= \delta(t)f(x) \\ &= 0, \qquad t>0.\end{aligned}$$

为了证明它满足初始条件，我们仍利用第二章定理 2.3.12. 实际上那里的例 2 已证明了当 $n=1$ 时 $K_n \triangleq (4\pi t)^{-n/2}\exp[-|x|^2/4t] \to \delta(x)$ (当 $t\to 0^+$). 对一般的 n 可用归纳法证明它也是对的(作为习题). 然而，因为

$$(4\pi t)^{-n/2}\int \exp[-|x|^2/4t]dx = \prod_{j=1}^n (4\pi t)^{-1/2}\int \exp(-x_j^2/4t)dx_j = 1,$$

且对固定的 $t>0$，$K_n\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，以它作磨光核(见习题 2)也可证得：$K_n(x,t)\to\delta(x)$ (当 $t\to 0^+$). 因此对任意 x 皆有

$$\lim_{t\to 0^+}(K \underset{(x)}{*} f)(x,t) = f(x) .$$

由 $f(x)$ 的连续性，很容易证明(如第二章定理 2.2.4 一样)上述收敛当 x 位于 $\mathbf{R}^n$ 之任一紧集中时，对 x 为一致.

(10)式是柯西问题的有界解. 因为我们假设了 $f(x)$ 是有界的，即 $|f(x)| \leqslant M$. 代入(10)式，因为 $(4\pi t)^{-n/2}\exp[-|x-\xi|^2/4t] > 0$，所以

$$|u(x,t)| \leqslant M(4\pi t)^{-n/2}\int \exp[-|x-\xi|^2/4t]dx = M .$$

即解 $u(x)$ 也有界. 对于热传导方程，指定在什么函数类中求解是一个重要问题. 这一点在下一节还要讲到.

关于柯西问题的唯一性将在下一节讨论.

最后我们再讲热传导方程的基本解的一个应用.

定理 7.1.1(维尔斯特拉斯逼近定理). 若 $f(x)$ 是连续函数而且在 $\mathbf{R}^n$ 中有紧支集，则对任意紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$，一定能找到一个多项式序列 $P_m(x)$ 在 K 上一致收敛于 $f(x)$.

证 用基本解(8)在 $t>0$ 时与 $f(x)$ 作卷积：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [K(\cdot,t) \underset{(\cdot)}{*} f(\cdot)](x) \\ &= (4\pi t)^{-n/2}\int f(\xi)\exp[-(x-\xi)^2/4t]d\xi , \end{aligned}$$

取 $t = t_m \to 0$. 则 $u(x,t_m)$ 对 $x \in K$ 一致收敛于 $f(x)$. 然而因为

$$\exp[-|x-\xi|^2/4t_m] = \exp[-\sum_{j=1}^{n}(x_j-\xi_j)^2/4t_m]$$

是 $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{C}^n$ 的整函数，而当 ξ 在 supp f 上时可以用其泰勒级数的部分和 $S_m(x,\xi,t_m)$ 去逼近，因而对任意 $\varepsilon>0$ 及 t_m 存在 $S_m(x,\xi,t_m)$ 使得

$$\begin{aligned} &|\exp[-|x-\xi|^2/4t_m] - S_m(x,\xi,t_m)| \\ &< \frac{\varepsilon \cdot (4\pi t_m)^{n/2}}{\max|f| \cdot 2|\mathrm{supp}\, f|} , \end{aligned}$$

这里 $|\mathrm{supp}\, f|$ 表示集合 supp f 之测度(体积). 令

$$P_m(x) = (4\pi t_m)^{-n/2}\int S_m(x,\xi,t_m)f(\xi)d\xi .$$

则

$$\begin{aligned} &|f(x) - P_m(x)| \\ &\leqslant |f(x) - u(x,t_m)| + \\ &(4\pi t_m)^{-n/2}\int |f(\xi)||\exp[-|x-\xi|^2/4t_m] - S_m|d\xi \\ &\leqslant |f(x) - u(x,t_m)| + \frac{\varepsilon}{2} , \end{aligned}$$

取 m 充分大，使当 $x \in K$ 时有 $|f(x) - u(x,t_m)| < \varepsilon/2$，所以，当 $x \in K$ 而 $m \to \infty$ 时，有 P_m 一致收敛于 f.

上述定理本是数学分析中一个重要定理，应用极广，应该在数学分析课程中已经讲过，但因现在的讲法很简单，从历史上看它又确实是维尔斯特拉斯在研究热传导方程时得到的，所以在这里再讲一次.

习 题

1. 设 $f \in C^3(\mathbf{R}^n)$，证明在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ 中

$$\langle \delta(t, \cdot), f(\cdot) \rangle = f(0)\delta(t).$$

2. 设 $K(x,t)$ 是热传导方程的基本解，证明：

(1) $K(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} K\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$；

(2) 当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $K(x,\varepsilon^2) \to \delta(x)$（于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$）.

3. 若 $|f(x)| < c\exp\{|x|^2 - \varepsilon\}$，且 f 是连续函数，则当 x 属于任何紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$，$t \to 0$ 时，$f(\cdot) \underset{(\cdot)}{*} K(\cdot,t)$ 在 K 上一致收敛于 f.

4. 设 $u_1 = F(x,t) \underset{(x,t)}{*} K(x,t)$，$u_2 = (f(x) - u_1(x,0)) \underset{(x)}{*} K(x,t)$，证明 $u = u_1 + u_2$ 满足柯西问题

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = F(x,t), & \text{在 } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \text{ 内}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

5. 设 $U(x,t,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & x \in \mathbf{R},\ t > \tau\ (\tau > 0), \\ U\big|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases}$$

令 $u(x,t) = \int_0^t U(x,t,\tau)d\tau$，证明 $u(x,t)$ 为柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

之解.

6. 证明如果 $u_i(x,t)$ 是问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u_i\big|_{t=0} = \varphi_i(x) \end{cases}$$

的解，则 $u(x,y,t) = u_1(x,t)u_2(y,t)$ 是定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi_1(x)\varphi_2(y) \end{cases}$$

的解.

7. 写出热传导方程柯西问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (x,y)\in \mathbf{R}^2,\ t>0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(y)$$

的解的表达式.

§ 2. 初边值问题

1. 极值原理 §1 中的柯西问题描述了一个无边界物体中温度分布(已知 $t=0$ 时的温度分布). 这当然是理想情况. 实际的情况应该是: 已知 $t=0$ 时在 Ω 内以及 $t>0$ 时在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布, 求 Ω 内 $t>0$ 时的温度分布. 因此除了初始条件外, 还应该有一个边值条件. 常见的边值条件有

$$u|_{\partial\Omega}=f, \qquad f \text{ 为已知},$$

它表示已知 $\partial\Omega$ 上的温度分布; 或者

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f, \qquad f \text{ 为已知},$$

它表示已知通过 $\partial\Omega$ 的热流量; 或者

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+ku\right)\right|_{\partial\Omega}=f, \qquad k,\ f \text{ 为已知},\ k>0,$$

它表示通过 $\partial\Omega$ 的热流与 $\partial\Omega$ 内外介质温差的关系. 这种既有初始条件又有边值条件的求解问题就构成初边值问题(又称混合问题). 本节中我们将讨论第一初边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0, \\ u|_{t=0}=f, \\ u|_{\partial\Omega}=g.\end{cases} \tag{11}$$

这里限制 $0\leqslant t\leqslant T$, 因此我们实际上是在 $\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n$ 空间的柱形区域 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 中考虑问题, 而定解条件只给在部分边界 Γ (下底和侧面)上. 我们可以稍微推广一点, 例如在 $n=1$ 时在 (x,t) 平面上设开区域 Ω 由下底 $t=0$, 上底 $t=T$ 以及侧边两条曲线 $x=\varphi_1(t)$, $x=\varphi_2(t)$(满足当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时, $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)$) 所围成, 并将边值条件给在下底及两侧(即 Γ)上, 而在 $t=T$ 上不给条件, 即考虑第一初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (x,t) \in \Omega \cup \{t = T\} , \\ u|_\Gamma = f . \end{cases} \tag{12}$$

定理 7.2.1(**极值原理**) 第一初边值问题(12)的解 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup \{t = T\})$ 在 Γ 上取其最大值与最小值.

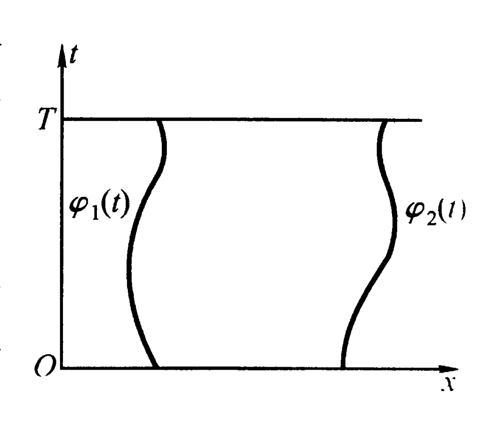


图 7—1

证 令 $M = \max\limits_{\bar{\Omega}} u(x,t)$, $m = \max\limits_{\Gamma} u(x,t)$, 显然 $M \geqslant m$. 设此定理不真，于是有一个解 $u(x,t)$ 在 (x^*,t^*) 取最大值 $M > m$，而且 $(x^*,t^*) \in \Omega$，或者 $t^* = T$. 作辅助函数

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}(x - x^*)^2, \tag{13}$$

这里 $l = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\varphi_2(t) - \min\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\varphi_1(t)$. 于是在 Γ 上，

$$v(x,t) \leqslant m + \frac{M-m}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3m}{4} = \theta M, \quad 0 < \theta < 1 ,$$

并且 $v(x^*,t^*) = M$. 所以，这个 $v(x,t)$ 在 Γ 上的最大值小于它在 $\Omega \cup \{t = T\}$ 上的最大值，也就是说，$v(x,t)$ 必在一点 $(x_1,t_1) \in \Omega$ 或 $t_1 = T$ 处达到最大值.

若 $(x_1,t_1) \in \Omega$，则 $\partial_t v(x_1,t_1) = 0$, $\partial_x^2 v(x_1,t_1) \leqslant 0$.

若 $t_1 = T$, $\varphi_1(T) < x_1 < \varphi_2(T)$，则 $\partial_t v(x_1,t_1) \geqslant 0$, $\partial_x^2 v(x_1,t_1) \leqslant 0$. 总之，在 (x_1,t_1) 处 $\partial_t v - \partial_x^2 v \geqslant 0$. 但由(13)式

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x^2 v &= \partial_t u - \partial_x^2 u - \frac{M-m}{2l^2} \\ &= -\frac{M-m}{2l^2} < 0 . \end{aligned}$$

这个矛盾表明 $M > m$ 不真而 $M = m$，即 u 在 Γ 上达到最大值. 在 Γ 上达到最小值的证明与此相同.

系 7.2.2 第一初边值问题的解在函数类 $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup \{t = T\})$ 中是唯一的，而且对于初边值有连续依赖性.

极值原理也可以用来考查柯西问题解的唯一性. 这时我们需要证明带形区域上的极值原理.

定理 7.2.3. 若 $u(x,t)$ 在带形域

$$S = \{(x,t);\ -\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty\}$$

上连续而且有界，在 S 内满足热传导方程，则必有

$$M = \sup_{-\infty<x<+\infty} u(x,0) \geqslant u(x,t) \geqslant \inf_{-\infty<x<+\infty} u(x,0) = m \ .$$

证 我们来证明 $u \leqslant M$，$u \geqslant m$ 的证明留作习题. 为此任给 $\varepsilon > 0$，我们证明在任一点 $(x_0,t_0) \in S$ 处，$u \leqslant M + \varepsilon$. 令 $N = \sup\limits_S |u(x,t)|$，$w(x,t) = 2t + x^2$（它适合热传导方程），于是

$$W(x,t) = \varepsilon w(x,t)/w(x_0,t_0) + M - u(x,t)$$

在 S 中满足热传导方程. 当 $t = 0$ 时，因为 $u(x,0) \leqslant M$，$w(x,t) = x^2 \geqslant 0$，

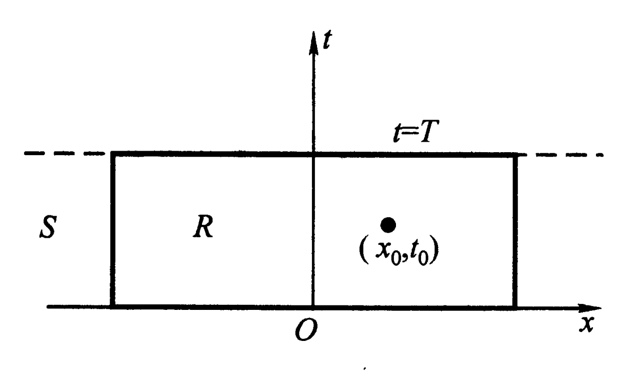


图 7－2

从而 $W(x,0) \geqslant 0$. 当 $|x| = [(N - M)w(x_0,t_0)/\varepsilon]^{\frac{1}{2}} + |x_0|$，而 $t \geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned} W(x,t) &\geqslant \varepsilon x^2/w(x_0,t_0) + M - u(x,t) \\ &\geqslant (N - M)w(x_0,t_0)/w(x_0,t_0) + M - u \\ &\geqslant 0 \ , \end{aligned}$$

这样，在矩形 $R = \{(x,t);\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant [(N - M)w(x_0,t_0)/\varepsilon]^{\frac{1}{2}} + |x_0|\}$ 的侧边和下底上 $W \geqslant 0$. 由定理 7.2.1，在 R 内 $W \geqslant 0$. 但 $(x_0,t_0) \in R$，所以 $W(x_0,t_0) \geqslant 0$，即有

$$\varepsilon + M - u(x_0,t_0) \geqslant 0 \ .$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得定理的证明.

系 7.2.4 *热传导方程的柯西问题的有界连续解是唯一的，而且连续依赖于初值.*

在 §1 中我们指出，在讨论热传导方程时，确定解所在的函数类是重要的. 事实上，如果我们允许解无界，但 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)| = o(1)\exp(Cx^2)$，$C$ 是某一正数，唯一性仍成立；否则唯一性不成立，既使将 x^2 改为 $x^{2+\varepsilon}$，$\varepsilon > 0$ 是任意小数，虽然 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)|\exp(-x^{2+\varepsilon}) \to 0$（当 $|x| \to +\infty$），仍有反例证明唯一性不成立（参见弗里特曼（A. Friedman）著《抛物型偏微分方程》（科学出版社）第一章）.

2. 傅里叶方法 现在我们在矩形区域 $\Omega = \{(x,t);\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 中求解第一初边值问题. 请读者注意，现在我们要介绍的并不只是求解某个特定问题的特殊方法，而是求解数学物理中的边值问题的最常见的初等方

法，它适用于各种类型的方程. 因此下面举的例子不全是抛物型方程的定解问题. 这一点读者必须注意，必须掌握这个方法. 先从最简单的情况开始：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 , \\ u(x,0) = f(x) . \end{cases} \tag{14}$$

为了使解可以在闭矩形中连续，我们暂设 $f(x)$ 为$[0,l]$上的连续函数，而且适合“衔接条件”：$f(0) = f(l) = 0$.

最重要的是：边值条件可以改成其他类型的，如 $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ 等等，但必须是齐次的. 非齐次问题的处理方法见本章之末.

我们来求可以写成

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{15}$$

形状的解(即可以分离变量的解). 以(15)代入(14)中的方程，有

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) ,$$

$$X''(x)/X(x) = T'(t)/T(t) = -\mu.$$

这里 μ 必然是一常数，但其值尚未确定. 于是我们得到两个常微分方程

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 , \quad T'(t) + \mu T(t) = 0.$$

我们先考查(14)式中的边值条件而将初始条件暂置一旁. 由于 $u(x,t)$ 应适合 $u(0,t) = u(l,t) = 0$，所以必须有 $X(0) = X(l) = 0$，则 $X(x)$ 满足常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 , \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

下面分别关于 μ 的几种情况讨论(16)的解：

(1) $-\mu = \lambda^2 > 0$. 这时可得到通解

$$X(x) = Ce^{\sqrt{-\mu}x} + De^{-\sqrt{-\mu}x},$$

故由边值条件有

$$C + D = 0 , \quad Ce^{\sqrt{-\mu}l} + De^{-\sqrt{-\mu}l} = 0 .$$

于是可得 $C = D = 0$，则 $X(x) \equiv 0$. 所以这时将得到初边值问题(14)的平凡解 $u(x,t) \equiv 0$，它是没有用处的. 请读者注意，在应用傅里叶方法时，必须避免平凡解，否则是得不到任何有用的信息的.

(2) $-\mu = 0$. 这时常微分方程的通解为 $X(x) = C + Dx$，而由边值条件给出 $C = 0$，$Dl = 0$. 这一次又得到了(14)的平凡解 $u(x,t) \equiv 0$.

(3) $-\mu = -\lambda^2 < 0$. 这时常微分方程的通解为

$$X(x) = C\cos \lambda x + D\sin \lambda x . \tag{17}$$

边值条件给出 $C = 0$，$D\sin \lambda l = 0$. 当然我们不能再取 $D = 0$，否则又得到平

凡解. 因此必须选 λ 使 $\sin\lambda l = 0$, 即 $\lambda = n\pi/l$, $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$($n = 0$ 又给出平凡解). 但实际上 $n = k$ 与 $n = -k$ 将给出同样的 $D\sin\frac{k\pi x}{l}$, D 是一个未定常数. 总之, 我们取 n 为自然数 $n = k$ 而得到一串 $X_k(x) = D_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \cdots$.

至此 $X(x)$ 已求得. 总结起来, 我们需要解决的是以下的问题: 求常数 μ 的值, 使常微分方程的边值问题有非零解. 这个问题称为斯图姆 - 刘维尔(Sturm-Liouville) 问题(简称 $S - L$ 问题). 所得的 μ 之值(在我们的情况下是 $\mu_k = (k\pi/l)^2$) 称其为固有值(或本征值, 特征值), 相应的非零解($X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$) 称其为固有函数(或本征函数, 特征函数); 固有值全体($\{(k\pi/l)^2; k = 1, 2, \cdots\}$) 称为该 $S - L$ 问题的谱.

求得 $X_k(x)$ 后再求相应的 $T_k(t)$, 它满足 $T_k'(t) + (k\pi/l)^2 T_k(t) = 0$, 则 $T_k(t) = A_k\exp(-(k\pi/l)^2 t)$, 从而得 $u_k(x,t) = A_k\exp(-(k\pi/l)^2 t)\sin(k\pi x/l)$, A_k 是任意常数.

最后来看如何处理初始条件, 我们把 $u_k(x,t)$ 叠加起来而得

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\exp[-(k\pi/l)^2 t]\sin(k\pi x/l), \tag{18}$$

如果它收敛而且可以逐项微商, 则它满足(14) 中的热传导方程和边值条件. 这里我们看到规定边值条件为齐次的用意了: 不然的话, $u_k(x,t)$ 叠加起来不能满足边值条件. (18) 式中的 A_k 还没有决定, 我们要这样选择 A_k 使(18) 式适合初始条件:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin(k\pi x/l). \tag{19}$$

但 $\{\sin(k\pi x/l)\}$, $k = 1, 2, \cdots$, 是区间 $[0,l]$ 上的一个完全的正交系, (19) 式就是 $f(x)$ 的正弦展开式. 所以, 由傅里叶级数理论我们有

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(k\pi x/l)dx. \tag{20}$$

至此, 我们得到第一初边值问题(14) 之形式解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\exp[-(k\pi/l)^2 t]\sin(k\pi x/l), \tag{21}$$

其中 A_k 由(20) 式决定.

我们当然应该验证解(21) 的收敛性和逐项微商是否可能, 以保证解(21) 满足(14) 中的热传导方程和边值条件. 好在我们已设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续, 所以

$$|A_k| \leqslant \frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|dx = M.$$

由于有一个很好的收敛因子 $\exp[-(k\pi/l)^2t]$，所以(21)式右端的级数在 $t>0$ 处确实收敛并可逐项微商任意多次，从而在 $t>0$ 处解(21)确实适合方程和边值条件. 为满足初始条件需要考虑(19)式的收敛性. 只假设 $f(x)$ 连续不足以保证它在古典意义下的收敛性，而又需要在广义函数意义下去讨论它. 但由于我们的目的只在于介绍这种方法以及由它引起的 $S-L$ 问题，所以就不再讨论其中的细节. 我们只顺带提到，由于收敛因子 $\exp[-(k\pi/l)^2t]$ 的出现，使解(21)在 $t>0$ 时属于 C^∞ 而在 $t=0$ 处只可能在广义函数意义下收敛，这仍是热传导算子亚椭圆性的表现.

傅里叶方法又称分离变量法，这个称呼的来源是明显的.

3. **比较一般的情况** 为了更进一步弄清这个方法的实质以及它所带来的数学问题，我们考虑比较一般的情况：

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u\ , \\ u(0,t)=u(l,t)=0\ , \\ u(x,0)=f(x)\ . \end{cases} \tag{22}$$

仍设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，于是我们有

$$\rho(x)X(x)T'(t)=\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)]T(t)-q(x)X(x)T(t)\ .$$

因而对 $X(x)$ 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]X(x)=0\ , \\ &X(0)=X(l)=0\ , \end{aligned} \tag{23}$$

λ 是一个待定的常数. 我们又得到一个 $S-L$ 问题：求 λ 之值使上述问题有非平凡解. 第一个需要解决的问题是 $S-L$ 问题的固有值与固有函数的存在问题. 我们的结论是：当 $\rho(x)$，$p(x)$，$p'(x)$，$q(x)$ 皆在 $[0,l]$ 上连续，且有正常数 ρ_0，p_0 使 $\rho(x)\geqslant\rho_0$，$p(x)\geqslant p_0$，则 $S-L$ 问题(23)恒有离散的谱 $\{\lambda_k\}$，$k=1,2,\cdots$，而且相应于固有值 λ_k，线性无关的固有函数 $X_k(x)$ 只有一个.

求出 λ_k 和 X_k 后，再求 $T_k(t)$ 使其满足

$$T_k(t)+\lambda_k T_k(t)=0\ ,$$

从而

$$T_k(t)=A_k\exp(-\lambda_k t)\ ,$$

而且最后我们又得到如下的形式解：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\exp(-\lambda_k t)X_k(x)\ . \tag{24}$$

为了满足初始条件，又需要

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) . \tag{25}$$

所以我们遇到的第二个问题是如何将 $f(x)$ 按固有函数 $\{X_k(x)\}$ 展开的问题. 这里首先要注意，$S-L$ 问题的固有函数以 $\rho(x)$ 为权正交. 准确的说，我们有

定理 7.2.5. 设 X_m，X_n 是 $S-L$ 问题(23) 的相应于不同固有值 λ_m，$\lambda_n(\lambda_m \neq \lambda_n)$ 的固有函数，则

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0 .$$

证 由假设

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_m}{dx}\right] + [\lambda_m \rho(x) - q(x)]X_m = 0 ,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_n}{dx}\right] + [\lambda_n \rho(x) - q(x)]X_n = 0 .$$

以 X_m 乘后式、以 X_n 乘前式相减后再积分有

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l \rho(x) X_m X_n dx$$

$$= -\int_0^l \left\{X_n \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_m}{dx}\right] - X_m \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_n}{dx}\right]\right\} dx. \tag{*}$$

对右方分部积分注意到 X_m，X_n 在 0，l 处为 0，例如有

$$\int_0^l X_n \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_m}{dx}\right] dx$$

$$= p(x) X_n \frac{dX_m}{dx}\Big|_0^l - \int_0^l p(x) X_m' X_n' dx$$

$$= \int_0^l p(x) X_m' X_n' dx.$$

对另一积分也可用同法处理，经计算后即知(*)式右方为零. 注意到 $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$，定理得证.

因为固有函数乘以任意常数后仍为固有函数，以后我们恒将 $X_m(x)$ 乘以 $\left[\int_0^l \rho(x) X_m^2 dx\right]^{-\frac{1}{2}}$(注意 $\int_0^l \rho X_m^2 dx > 0$，否则有 $X_m \equiv 0$) 而使得

$$\int_0^l \rho(x) X_m^2 dx = 1 , \quad m = 1, 2, \cdots .$$

这个手续称为固有函数的“规范化”(物理学中常称为“归一化”)，这样得到的固有函数是一个规范化正交系：

$$\int_0^l \rho(x) X_m X_n dx = \delta_{mn}. \tag{26}$$

它还是一个完全系(证明见下面引的参考书)，因此，任一平方可积函数 $f(x)$

都可以按它们展开而得(25)式，称为 $f(x)$ 的广义傅里叶级数，A_k 称为其广义傅里叶系数. 为求 A_m，可用 ρX_m 遍乘(25)式两边再逐项积分. 由(26)式有

$$A_m = \int_0^l \rho(x) f(x) X_m(x) dx . \qquad (27)$$

求出 A_k 以后即得第一边值问题的形式解(24). 应讨论这个级数的收敛性以及它在何种意义下满足方程. 为此，应该讨论第三个问题：λ_k，$X_k(x)$ 的渐近性态如何. 即当 $k \to \infty$ 时，它们的大小如何估计?

以上我们比较一般地给出了傅里叶方法总的程序及其中存在的问题. 在И. Г. 彼得罗夫斯基著，段虞荣译的《偏微分方程讲义》(高等教育出版社，1965)一书中对这些问题的解决有一个很好的介绍，我们就不再讨论了. 但有一点要指出：由于傅里叶方法是一个构造性的方法，它不能给出唯一性. 好在我们已经用极值原理证明了唯一性.

4. **例** 傅里叶方法是适用于多种类型数学物理问题的相当普遍的方法，在实际应用中又有许多变化. 下面我们用不同类型的问题为例来讨论它的应用，其中有些结果已在其他章节中用别的方法得到了.

(1) **有界弦的振动.** 考虑有界弦 $0 \leqslant x \leqslant l$ 的振动. 这时除方程和初始条件

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned} \qquad (28)$$

外，还应给出边值条件. 现在我们不再给 $u(0,t) = u(l,t) = 0$(两端固定)而给出所谓“自由端条件”：

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 . \qquad (29)$$

请注意应用傅里叶方程时有什么新问题.

仍设 $u(x,t) = X(x)T(t)$. 这时可以得到

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 , \quad T''(t) + \mu T(t) = 0 .$$

于是由边值条件可以得到 $S - L$ 问题

$$\begin{aligned} &X''(x) + \mu X(x) = 0 , \\ &X'(0) = X'(l) = 0 . \end{aligned}$$

仍然对于 μ 分别几种情况：首先设 $\mu = -\lambda^2 < 0$，这时

$$X(x) = Ce^{\lambda x} - De^{-\lambda x}, \quad \lambda \neq 0 ,$$

而由边值条件有

$$C - D = 0 , \quad Ce^{\lambda l} - De^{-\lambda l} = 0 ,$$

因此 $C = D = 0$ 而得到平凡解. 这是无意义的，应该舍去. 其次令 $\mu = \lambda^2 > 0$，这时有

$$X(x) = C\cos \lambda x + D\sin \lambda x \ ,$$

而边值条件给出：

$$D = 0 \ , \quad C\sin \lambda l = 0 \ .$$

由于$C \neq 0$(否则又得平凡解)，又得固有值$\mu_k = (k\pi/l)^2$以及规范化固有函数$X_k = 2l^{-\frac{1}{2}}\cos(k\pi x/l)$，$k = 1, 2, \cdots$，最后令$\mu = 0$而有

$$X(x) = C + Dx \ .$$

由边值条件有$D = 0$，所以还有固有值$\mu_0 = 0$以及固有函数$l^{-\frac{1}{2}}$.

必须注意，在求解$S - L$问题时不要漏掉某个固有值而使全部固有函数的系缺少完全性. 否则，即使令$A_k = \int_0^l fX_k dx$，$\sum A_k X_k(x)$也不一定收敛于$f(x)$. 例如在我们的情况中，不能漏了$\mu_0 = 0$，因为一般的$f(x)$不能展开为$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\pi x/l)$，但一定可以展开为

$$A_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\pi x/l) \qquad (\text{余弦展开式}).$$

对$T(t)$我们则有

$$T''_k(t) + (k\pi/l)^2 T_k(t) = 0 \ .$$

所以

$$T_0(t) = a_0 + b_0 t \ ,$$
$$T_k(t) = a_k\cos(k\pi t/l) + b_k\sin(k\pi t/l) \ , \quad k \neq 0 \ ,$$

从而解成为

$$u(x,t) = (a_0 + b_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k\cos(k\pi t/l) + b_k\sin(k\pi t/l)]\cos(k\pi x/l) \ ,$$

以初始条件代入即得

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\pi x/l) \ ,$$
$$\psi(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k k\pi/l)\cos(k\pi x/l) \ .$$

于是即可求得a_k，b_k.

把这个结果与热传导方程的相应结果比较，可以发现这里少了收敛因子$\exp[-(k\pi/l)^2 t]$，而使上述级数的收敛性变得很差(这正是没有亚椭圆性的反映)而要求初值函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$有更高的光滑性，以保证级数逐项微分二次后仍收敛.

(2) **圆域上的狄利克雷问题.** 我们现在用傅里叶方法来解决拉普拉斯方程在圆$\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 < R^2\}$上的狄利克雷问题(为简单计，设

$R=1$)：

$$\Delta u = 0\ ,\qquad \text{于 } \Omega \text{ 中},$$
$$u|_{\partial\Omega} = f\ ,$$

f 是已知的连续函数. 采用极坐标可将问题化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\ ,$$
$$u(1,\theta) = f(\theta)\ ,$$

这里，f 是以 2π 为周期的连续周期函数. 再用分离变量法，令 $u = R(r)\Phi(\theta)$，有

$$\left[R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)\right]\Phi(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\theta) = 0\ .$$

因此有

$$\Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0\ , \tag{30}$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0\ . \tag{31}$$

从表面上看来没有边值条件，但因调和函数是单值函数，所以化到极坐标后应为 θ 的周期函数(周期 2π)：$u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$. 因此对 Φ 有

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi)\ . \tag{32}$$

它起了边值条件的作用，故称为周期边值条件，对(30)及(32)的固有值问题可给出固有值与固有函数：

$$\lambda_k = k^2,\quad k = 0,1,2,\cdots\ ,$$
$$\Phi_k(\theta) = a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta\ .$$

然后对于 $R(r)$ 有

$$R_k''(r) + \frac{1}{r}R_k'(r) + \frac{k^2}{r^2}R_k(r) = 0\ .$$

这是一个欧拉方程，其通解为

$$R_0 = c_0 + d_0\ln r\ ,$$
$$R_k = c_k r^k + d_k r^{-k}.$$

但是调和函数在 $r=0$ 处是连续的，所以必有 $d_k = 0$，$k = 0,1,2,\cdots$. 这称为有界性条件. 总之，可以得到解

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)\ . \tag{33}$$

现在利用边值条件决定 a_k，b_k，我们有

$$u(1,\theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)\ , \tag{34}$$

但这正是傅里叶展开式的形状，故令

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi\,,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi\,. \tag{35}$$

代入(33)式即得原问题的形式解.

一个重要的问题是级数的收敛性问题. 我们必须牢记傅里叶级数理论中一个重要的事实：连续函数的傅里叶级数不一定收敛，但其傅里叶系数一定有界：$|a_k| \leqslant M$，$|b_k| \leqslant M$(实际上还可以进一步证明 $a_k \to 0$，$b_k \to 0$)，这可以由(35)式直接得到. 所以(33)以 $2\sum Mr^k$ 为优级数，而在 $r<1$ 时收敛. 将(33)逐项微分任意次仍在 $r<1$ 时收敛. 因此 $u \in C^\infty(\Omega)$，前面已经指出，这正是亚椭圆性的表现.

余下的问题仍是 u 如何取边值. 在 $r=1$ 处(33)式不一定收敛，这说明调和函数在区域边界上丧失了光滑性. 但若将(35)式代入(33)式，将有

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(\theta-\varphi)\right] d\varphi\,. \tag{33)'$$

因为 $r^k\cos k(\theta-\varphi) = \mathrm{Re}\, r^k \exp[k(\theta-\varphi)i]$，因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos k(\theta-\varphi) \\
&= -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k(\theta-\varphi) \\
&= -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(r^k \exp[k(\theta-\varphi)i]) \\
&= -\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\,\frac{1}{1 - r\exp[(\theta-\varphi)i]} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1 - r\cos(\theta-\varphi)}{(1 - re^{i(\theta-\varphi)})(1 - re^{-i(\theta-\varphi)})} \\
&= \frac{1-r^2}{2[1 - 2r\cos(\theta-\varphi) + r^2]}\,.
\end{aligned}$$

代入(33)′后又一次得到泊松公式

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)(1-r^2)d\varphi}{[1 - 2r\cos(\theta-\varphi) + r^2]}\,.$$

但在上一章已经用圆上的格林函数方法证明了

$$\lim_{r\to 1^{-0}} u(r,\theta) = f(\theta)\,,$$

所以

$$\lim_{r\to 1^{-0}}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k\cos k\theta + b_k \sin k\theta)\right] = f(\theta)\,.$$

这就是说，一个可能发散的级数(34)，在加上收敛因子r^k以后收敛，而且在$r \to 1^{-0}$时仍有极限$f(\theta)$. 所以可以说$f(\theta)$是傅里叶级数(34)式的“广义和”，而(34)式称为“可求和”级数. 数学中，发散级数有多种求和法，上述求和法称为“A—求和法”(A指Abel)，所以上述解在A—可求和意义下满足边值条件.

上一章我们看到，当$r \to 1^{-0}$时，泊松核

$$\frac{1-r^2}{[1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2]} \to \delta(\theta-\varphi) ,$$

这种广义函数意义下的收敛性解释了泊松积分取边值的意义. 现在看到，它在级数(33)情况下又演变成(34)的A—可求和性，可见A—可求和性只不过是广义函数理论的又一次“换装表演”.

(3) **圆形区域中的热传导.** 傅里叶方法可以用于高维区域. 这时，如果区域的形状有某种对称性，应用傅里叶方法时常导致某些特殊函数. 下面以圆形区域中的热传导问题为例. 记$Q=\{t>0\}\times\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 , & \text{于 } Q \text{ 内}, \\ u|_{x^2+y^2=1}=0 , \\ u(x,y,0)=f(x,y) . \end{cases} \tag{36}$$

先令$u=T(t)X(x,y)$，我们还不知道x和y能否进一步分离，于是有

$$\begin{cases} \Delta X+\lambda X=0 , \\ X|_{x^2+y^2=1}=0 , \end{cases} \tag{37}$$

及

$$T'(t)+\lambda T(t)=0 .$$

在(37)式中引用极坐标并令$X=R(r)\Phi(\theta)$，又有

$$\left[R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\lambda R\right]\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0 .$$

因此

$$\Phi''(\theta)+\mu\Phi(\theta)=0 ,$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0 .$$

对于Φ又应给出周期边值条件，因此$\mu=k^2$，$k=0,1,2,\cdots$，$\Phi_k(\theta)=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta$，$k=0,1,2,\cdots$. 对于$R$则有有界性条件，于是需要求解常微分方程边值问题

$$\begin{cases} R_k''+\dfrac{1}{r}R_k'(r)+(\lambda-k^2/r^2)R_k=0 , & 0<r<1 , \\ R_k(1)=0, \quad R_k \text{ 在 } r=0 \text{ 附近有界}. \end{cases} \tag{38}$$

(38) 式是著名的贝塞尔(Bessel) 方程，它将导致贝塞尔函数.

许多应用问题都是在特殊形状的区域中求解某一数学物理方程. 因此，时常按以上程序导致某种特殊函数，贝塞尔函数是其中最重要者之一. 由于本书中不可能介绍有关知识，读者可以参看例如郭敦仁编:《数学物理方法》(高等教育出版社，1965).

5. **非齐次问题.** 现在再回到开始，但这一次我们讨论非齐次问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t) \ , \\ u(0,t) = \varphi_1(t) \ , \quad u(l,t) = \varphi_2(t) \ , \\ u(x,0) = f(x) \ . \end{cases}$$

我们总是设法将解分为若干项之和(叠加)，使各项分别满足一些条件. 首先我们注意到边值条件，并且设法作一个函数；使之满足边值条件而暂将其他条件置之不顾. 显然 $\varphi_1(t) + \dfrac{x}{l}[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]$ 符合边值条件. 然后令

$$u = v + \{\varphi_1(t) + \frac{x}{l}[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]\} \ ,$$

对于 v，它满足如下方程和初始条件:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = g(x,t) - \{\varphi_1'(t) + \frac{x}{l}[\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)]\} \ ,$$

$$v(x,0) = f(x) - \{\varphi_1(0) + \frac{x}{l}[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)]\} \ .$$

但是 v 却适合齐次边值条件:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 \ .$$

所以我们得到了一个新问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = g_1(x,t) \ , \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \ , \\ v(x,0) = f_1(x) \ . \end{cases} \tag{39}$$

前面我们已看到相应于这类问题所对应的齐次方程及齐次边值条件的 $S-L$ 问题为(16)，它的固有函数是 $\sin(k\pi x/l)$，所以我们可将 $g_1(x,t)$，$f_1(x)$ 和 $v(x,t)$ 都作为 x 的函数按这些固有函数展开，有

$$g_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\sin(k\pi x/l) \ ,$$

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\sin(k\pi x/l) \ , \tag{40}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(k\pi x/l) \ .$$

$g_k(t)$ 和 f_k 分别为 $g_1(x,t)$ 和 $f_1(x)$ 的傅里叶系数，因而是已知的.

将(40)式代入(39)式即得关于 $v_k(t)$ 的方程

$$v_k'(t) + (k\pi/l)^2 v_k(t) = g_k(t) ,$$
$$v_k(0) = f_k.$$

由它解出 $v_k(t)$ 再代回(40)式即得 $v(x,t)$.

习　题

1. (强极值原理)设 u 在图 7－1 的 Ω 中满足热传导方程，在 $\overline{\Omega}$ 上连续且不恒为常数，则 $u(x,t)$ 不能在 $\overline{\Omega}$ 的上底 $t=T$ 的内点上达到最大值或最小值.

2. 证明热传导方程的柯西问题在 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|=o(1)e^{cx^2}$ (c 为正常数)的函数类中的解唯一.

[提示：仿定理 7.2.3 的证明，并将其中的 $w(x,t)$ 换成 $W=8(c+1)^2t\cdot\exp\{8[(c+1)^2t+(c+1)x]\}$.]

3. 用傅里叶方法求解以下初边值问题：

(1)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 , & 0<x<\pi, t>0 , \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 , \\ u(x,0) = \sin x . \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = x(l-x), & 0<x<l, t>0 , \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 1 , \\ u(x,0) = \sin(\pi x/l) . \end{cases}$$

4. 求 $\delta(x-a)$ 的形式傅里叶级数，并解出以下的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x,a) & 0<a<l , \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 , \\ u(x,0) = 0 . \end{cases}$$

5. 令 $D(f_1,f_2)=\int_0^l(pf_1'f_2'+qf_1f_2)dx$, $H(f_1,f_2)=\int_0^l\rho f_1f_2dx$. 若 $f_1=X$ 是 $S-L$ 问题(23)相应于固有值 λ 的规范化了的固有函数，$f(x)$ 连续可微且 $f(0)=f(l)=0$. 证明 $D(X,f)=\lambda H(X,f)$.

6. 记号同上. 记 $D(f,f)=D(f)$, $H(f,f)=H(f)$，证明：

(1) 若 X 是相应于固有值 λ 的固有函数，则 $D(x)=\lambda$, $D(X_1,X_2)=0$ (X_1,X_2 是相应于不同固有值的固有函数).

(2) 对 $f\in C^1([0,l])$，且 $f\not\equiv 0$, $D(f)/H(f)$ 有下界从而有下确界. 由此推知，$S-L$ 问题的固有值集 $\{\lambda_n\}$ 有下确界.

7. 轴的横振动，当两端 $x=0$，$x=l$ 为固定时可以归结为以下的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0\,, & 0<x<l,\ t>0\,, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\,, \\ u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0\,. \end{cases}$$

用傅里叶方法求解此问题.

8. 用傅里叶方法解矩形 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上的拉普拉斯方程的狄利克雷问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,, \\ u(0,y)=u(a,y)=0\,, \\ u(x,0)=f(x),\ u(x,b)=0\,. \end{cases}$$

9. 长为 l 的均匀杆的初始温度为 0，一端 $x=0$ 保持常温 u_0 而且热量可通过另一端 $x=l$ 和杆的侧面发散到温度为 0 的介质中. 这时，杆中温度 $u(x,t)$ 是以下初边值问题之解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2u\,, & 0<x<l,\ t>0\,, \\ u(0,t)=u_0,\quad (u_x+Hu)\big|_{x=l}=0\,, & H>0\,, \\ u(x,0)=0\,. \end{cases}$$

试用傅里叶方法解此问题.

10. 两端固定在 $(0,0)$ 和 $(\pi,0)$ 而且绷紧了的弦，以初始速度

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=b\sin x\,,\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi$$

开始作自由振动，求位移 $u(x,t)$.

11. 求下述弦振动方程第二边值问题的形式解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\,, & 0<x<l,\ t>0\,, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu(t),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=l}=\nu(t), & t\geqslant 0\,, \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\,, & 0\leqslant x\leqslant l\,. \end{cases}$$

第八章　双曲型方程

§1. 柯西问题

1. **波动方程的基本解**　本章中我们将要讨论波动方程

$$\square_{n+1} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0 . \tag{1}$$

n 的大小对解的性态有很大影响. 我们先看在物理上最重要的 $\square_4$(三维空间和一维时间，简记为“3 + 1”)，并求其基本解 $E(x,t)$，$x = (x_1,x_2,x_3)$：

$$\square_4 E = \delta(x,t) . \tag{2}$$

还是考虑 $\mathscr{S}'$ 中的基本解，并将 $E(x,t)$ 对 x 作傅里叶变换得到 $\widetilde{E}(\xi,t)$，由第四章例 4 及(1)有(在广义微商意义下)

$$\frac{d^2\widetilde{E}}{dt^2} + c^2|\xi|^2\widetilde{E} = \delta(t) , \tag{3}$$

此时(3)的齐次方程

$$\frac{d^2\widetilde{E}}{dt^2} + c^2|\xi|^2\widetilde{E} = 0$$

的两个线性无关解为 $\widetilde{E}_1 = \sin c|\xi|t$, $\widetilde{E}_2 = \cos c|\xi|t$. 由常数变易法，令

$$\widetilde{E}(\xi,t) = C_1(\xi,t)\sin c|\xi|t + C_2(\xi,t)\cos c|\xi|t , \tag{4}$$

代入方程. 记 $C_i' = \dfrac{d}{dt}C_i(\xi,t)$，$i = 1,2$，并加上条件

$$C_1'\sin c|\xi|t + C_2'\cos c|\xi|t = 0 .$$

以上问题化为求解

$$\begin{cases} C_1'\sin c|\xi|t + C_2'\cos c|\xi|t = 0 , \\ C_1'(\sin c|\xi|t)'_t + C_2'(\cos c|\xi|t)'_t = \delta(t) . \end{cases}$$

于是可解得 $c|\xi|C_1' = \delta(t)\cos c|\xi|t = \delta(t)$，所以可求得 $C_1 = (c|\xi|)^{-1}H(t)$ 或 $-(c|\xi|)^{-1}H(-t)$ 及 $C_2 = 0$，于是(3)有两个最简形式的解

$$\widetilde{E}_+(\xi,t) = H(t)\frac{\sin c|\xi|t}{c|\xi|} , \tag{5}$$

$$\widetilde{E}_-(\xi,t) = -H(-t)\frac{\sin c|\xi|t}{c|\xi|} . \tag{6}$$

且有 $\operatorname{supp} E_+ \subset \{(x,t);\ t \geqslant 0\}$ 及 $\operatorname{supp} E_- \subset \{(x,t);\ t \leqslant 0\}$. 它们分别被称为 $\square_{n+1}$ 的前(后)向基本解. 为从 $\widetilde{E}_\pm$ 计算出 $E_\pm$，需要一类重要的广义函数，即集中在曲面 S 上的广义函数，它是 δ 函数的推广.

设曲面 $S = \{x;\ p(x) = 0,\ dp(x) \neq 0,\ p \in C^\infty\}$. 则可定义集中在 S 上的广义函数 $\delta(p(x)) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 如下：对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，定义

$$\langle \delta(p(x)),\ \varphi \rangle = \int\limits_{\{p(x)=0\}} \varphi(x) dS_x. \tag{7}$$

且可以证明(作为习题)：

$$\operatorname{sing\,supp} \delta(p(x)) = \operatorname{supp} \delta(p(x)) = \{x;\ p(x) = 0\}. \tag{8}$$

例如，设 S 是 $\mathbf{R}^n (n > 1)$ 中过原点的超平面. 经过坐标变换可设 S 为 $\{x;\ x_1 = 0\}$. 由(7)式有

$$\langle \delta(x_1),\ \varphi \rangle = \int\limits_{x_1=0} \varphi\, d\sigma = \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi(0, x_2, \cdots, x_n) dx_2 \cdots dx_n.$$

可见 $\mathbf{R}^n (n > 1)$ 中的 $\delta(x_1)$ 与 $\mathbf{R}^1$ 中的 $\delta(x_1)$ 是不同的，后者是集中在 $x_1 = 0$ 一点的广义函数，且使 $\langle \delta(x_1),\ \varphi \rangle = \varphi(0)$.

可定义 $\delta(p(x))$ 的傅里叶变换 $F(\delta(p(x)))(\xi) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n_\xi)$：对任意 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n_\xi)$，

$$\begin{aligned} \langle F(\delta(p(x)))(\xi),\ \varphi(\xi) \rangle &= \langle \delta(p(x)),\ \hat{\varphi}(x) \rangle \\ &= \int\limits_{\{p(x)=0\}} \hat{\varphi}(x) dS_x \\ &= \int\limits_{\{p(x)=0\}} dS_x \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

若 $S = \{x;\ p(x) = 0\}$ 为紧集，则 $\delta(p(x)) \in \mathscr{E}'$，于是

$$\langle F(\delta(p(x)))(\xi),\ \varphi(\xi) \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(\xi) d\xi \int\limits_{\{p(x)=0\}} e^{-ix\cdot\xi} dS_x,$$

则

$$F(\delta(p(x)))(\xi) = \int\limits_{\{p(x)=0\}} e^{-ix\cdot\xi} dS_x \quad (\in C^\infty(\mathbf{R}^n_\xi)). \tag{9}$$

特别地，当 $n = 3$，$p(x) = r - |x| (r > 0)$，则 S 为半径是 r，中心在原点的球面. 利用球坐标，以 ξ 为轴，球面上 x 向量与 ξ 之夹角为 $\theta (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. 则 $x \cdot \xi = |x||\xi| \cos\theta$，以 ξ 轴为旋转轴，旋转角为 φ，其中 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，则 $dS_x = r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$，于是

$$F(\delta(r - |x|))(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{-ir|\xi|\cos\theta} r^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= -2\pi r^2\int_0^\pi e^{-ir|\xi|\cos\theta}d\cos\theta$$

$$= 4\pi r|\xi|^{-1}\sin r|\xi| .$$

对 $t>0$，令 $r=ct(c>0)$，由(5)可得

$$E_+(x,t)=H(t)\delta(ct-|x|)/(4\pi c^2t) . \tag{10}$$

同理，当 $t<0$，令 $r=-ct$，由(6)得

$$E_-(x,t)=-H(-t)\delta(ct+|x|)/(4\pi c^2t). \tag{11}$$

最值得注意的是 $\operatorname{sing\,supp}E_+=\operatorname{supp}E_+=\{(x,t);|x|=ct\}$．这是一个半圆锥面，它对波动方程的讨论至关重要，称为特征锥面，而从物理出发，则宁可称它为前向光锥．同理，$E_-(x,t)$ 的支集和奇支集是后向光锥 $\operatorname{sing\,supp}E_-=\operatorname{supp}E_-=\{(x,t);|x|=-ct\}$．基本解的物理意义以后再讨论．因为 $\operatorname{sing\,supp}E_\pm\neq\{0\}$，根据亚椭圆的定义6.3.1得到波动算子不是亚椭圆的．其实从第一章对弦振动方程 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 的讨论即可看出这一点．那时得其通解为 $u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$，f，$g\in C^2$．也可以把它看成 $\Box_4u=0$ 的解，但此方程的右方 $0\in C^\infty$，而解只属于 C^2，甚至只属于 $\mathscr{D}'$，因为当 $f,g\in\mathscr{D}'$ 时，上式仍是其 $\mathscr{D}'$ 解，这即表明无亚椭圆性．

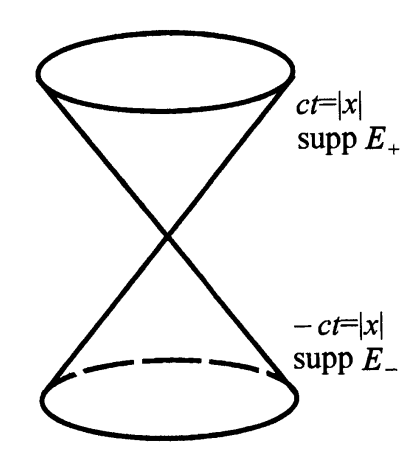


图 8－1

2. **柯西问题的解** 考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的柯西问题：

$$\begin{cases}\Box_4u\equiv\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\Delta_3u=f(x,t)\ , & t>0\ ,\\ u(x,0)=g_0(x),\ u_t(x,0)=g_1(x), & x\in\mathbf{R}^3,\end{cases} \tag{12}$$

这里，$f(x,t)\in C^2$，$g_0(x)\in C^3$，$g_1(x)\in C^2$．作这些规定是因为我们想求 C^2 解．

现在假设此问题有经典解 u 存在．为了导出它的表达式，先假定 u 是 C^∞ 的，并以 $H(t)u(x,t)$ 代替 $u(x,t)$，在 $\Box_4$ 的作用下即得

$$\begin{aligned}\Box_4(H(t)u)&=H(t)\Box_4u+H''(t)u+2H'(t)\partial_tu\\&=H(t)f+\delta'(t)u+2\delta(t)\partial_tu\\&=H(t)f+\partial_t(\delta(t)u)+\delta(t)\partial_tu(x,0)\\&=H(t)f(x,t)+\partial_t(\delta(t)g_0(x))+\delta(t)g_1(x),\end{aligned} \tag{13}$$

这里应用了广义函数 δ 与其乘子 ψ 作为广义函数所具有的等式 $\psi\delta=\psi(0)\delta$，$(\psi\delta)'=(\psi(0)\delta)'$（作为习题请读者自行证明）．利用基本解 $E_+(x,t)$ 可表示 $H(t)u(x,t)$ 如下：

$$H(t)u(x,t)=(H(t)f)\underset{(x,t)}{*}E_{+}+g_1\underset{(x)}{*}E_{+}(\cdot,t)$$
$$+g_0\underset{(x)}{*}\partial_t E_{+}(\cdot,t)\ ,\tag{14}$$

这里第一项表示对所有变元 (x,t) 作卷积，第二、三项中 t 作为参数，只对变元 x 作卷积. 这样能计算出

$$\begin{aligned}&(H(t)f\underset{(x,t)}{*}E_{+})(x,t)\\&=\int_{\mathbf{R}^4}\frac{H(t-\tau)H(\tau)}{4\pi c^2(t-\tau)}\delta(c(t-\tau)-|x-y|)f(y,\tau)dyd\tau\\&=\frac{1}{4\pi c}\int_0^t d\tau\int_{|x-y|=c(t-\tau)}\frac{f(y,\tau)}{|x-y|}dS_y\\&=\frac{1}{4\pi c^2}\int_{|x-y|\leqslant ct}\frac{f(y,t-|x-y|/c)}{|x-y|}dy\ ,\end{aligned}\tag{15}$$

以上在最后的等式中要利用积分变量变换 $\tau\mapsto r=c(t-\tau)$. (15)式的形状和椭圆型方程一章中的牛顿位势相似，只不过时间 t 上出现了推迟量 $|x-y|/c$，所以称为推迟势.

其次

$$\begin{aligned}&g_1\underset{(x)}{*}E_{+}(\cdot,t)\\&=\int\frac{g_1(y)\delta(ct-|x-y|)}{4\pi c^2t}dy\\&=\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{|x-y|=ct}g_1(y)dS_y\\&=t\cdot\frac{1}{4\pi(ct)^2}\int_{|x-y|=ct}g_1(y)dS_y=tM\{g_1\}\ ,\end{aligned}\tag{16}$$

这里 $M\{g_1\}$ 表示 g_1 在球面 $\{y;|x-y|=ct\}$ 上的平均值.

最后，类似地有

$$\begin{aligned}&g_0\underset{(x)}{*}\partial_t E_{+}(\cdot,t)\\&=\partial_t(g_0\underset{(x)}{*}E_{+}(\cdot,t))\\&=\partial_t[tM\{g_0\}]\ .\end{aligned}\tag{17}$$

综合(15)、(16)、(17)可见在 $t\geqslant 0$ 时

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2}\int_{|x-y|\leqslant ct}\frac{f(y,t-|x-y|/c)}{|x-y|}dy$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}[tM\{g_0\}]+tM\{g_1\}\ .\tag{18}$$

从(15)、(16)、(17)知当 $g_0\in C^3$, $g_1\in C^2$, $f\in C^2$ 时, $u\in C^2$ ，因而(18)是

柯西问题(12)的经典解.

以上是在假设 $u \in C^2$ 是柯西问题的经典解来导出(18)的. 即是说，如果此问题有经典解 u，则它只能写作(18)式. 这样我们仅仅证明了柯西问题解的唯一性. 为了证明其存在性，我们还应验证(18)式确实是解. 由(13)式知，当 $t > 0$ 时，$u(x,t)$ 满足方程式. 容易验证第一项适合零初始条件(见习题7)，且

$$\lim_{t\to 0^+} tM\{g_1\} = 0.$$

而因 $\frac{\partial}{\partial t}(M\{g_1\}) \in C^1$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t} tM\{g_1\}\\ &=\lim_{t\to 0^+} M\{g_1\} + \lim_{t\to 0^+} t\frac{\partial}{\partial t}(M\{g_1\})\\ &=\lim_{t\to 0^+} M\{g_1\} = g_1.\end{aligned}$$

关于第二项，记 $tM\{g_0\} = v$，由(13)知，当 $t > 0$ 时，$\Box_4 v = 0$. 所以由上式知

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t}[tM\{g_0\}] = g_0,$$

及

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}[tM\{g_0\}]\right)\\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lim_{t\to 0^+} \{\Box_4 v + c^2\Delta_3 v\}\\ &= \lim_{t\to 0^+} c^2\Delta_3 v = \lim_{t\to 0^+} c^2\Delta_3(tM\{g_0\})\\ &= \lim_{t\to 0^+} c^2\Delta_3(g_0 * E_+(\cdot,t)) = \lim_{t\to 0^+} c^2(\Delta_3 g_0) * E_+(\cdot,t)\\ &= \lim_{t\to 0^+} c^2 tM\{\Delta_3 g_0\} = 0\ .\end{aligned}$$

因此，我们得到

定理 8.1.1 若 $g_0 \in C^3(\mathbf{R}^3)$，$g_1 \in C^2(\mathbf{R}^3)$，$f \in C^2(\overline{\mathbf{R}^4_+})$，则由(18)式所确定的函数 $u \in C^2(\overline{\mathbf{R}^4_+})$ 是柯西问题(12)的解.

3. **降维法** 上面我们考虑了 $n = 3$ 的情况. $n = 2$ 和 $n = 1$ 的情况也都可以由它得出. 以下为简单计，我们都设 $f = 0$.

$n = 2$ 时的柯西问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}\right) = 0\ ,$$

$$u(x_1,x_2,0)=g_0(x_1,x_2),\quad u_t(x_1,x_2,0)=g_1(x_1,x_2) \tag{19}$$

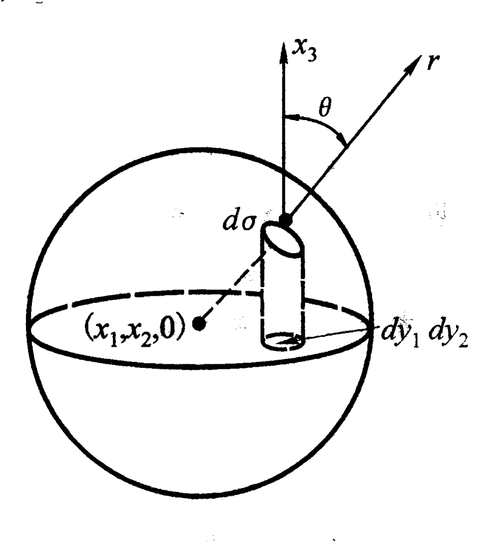


图 8-2

的解仍可由 $\Box_4 u=0$ 解得出，只要此解不含 x_3．问题是，当 g_0，g_1 不含 x_3 时，$\Box_4 u=0$ 之解是否不含 x_3？我们只来检查一下 $tM\{g_1\}$．

$$tM\{g_1\}=t\left(\frac{1}{4\pi c^2t^2}\right)\int_{|x-y|=ct} g_1(y)dS_y.$$

这里积分在以球心是 $(x_1,x_2,0)$、半径是 at 的球面上进行，球面上的点是 (y_1,y_2,y_3)．将 dS_y 投影到 (y_1,y_2) 平面上来，有 $dS_y=dy_1dy_2/\cos\theta$．但

$$\cos\theta=\frac{1}{ct}\sqrt{c^2t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}.$$

所以，把上半球面上的积分投影到 (y_1,y_2) 平面上得一个二重积分

$$t\left(\frac{1}{4\pi c^2t^2}\right)\iint_{|x-y|\leqslant ct}\frac{ctg_1(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{c^2t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}},$$

下半球面上也是一样．合起来即得

$$tM\{g_1\}=\frac{1}{2\pi c}\iint_{|x-y|\leqslant ct}\frac{g_1(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{c^2t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}. \tag{20}$$

它确实与 x_3 无关．同样

$$\frac{\partial}{\partial t}(tM\{g_0\})=\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|x-y|\leqslant ct}\frac{g_0(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{c^2t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}. \tag{21}$$

故 $n=2$ 时柯西问题(19)之解是以上二式之和．

这个方法叫做降维法．$n=1$ 时的解也可以这样来作，但因在第二章中我们已给出其解，所以现在不再重复了．

4．**波的传播．惠更斯(Huygens)原理**　波就是扰动的传播．波动方程的解从各个方面反映了这个事实，而主要的就是：波具有一定的传播速度．先从 $n=3$ 开始讨论．首先看(16)式，它是球面 S_{ct} 上的积分，球心在 x，半径为 ct．g_1 是初始扰动．如果它集中在 Ω 中，即 $\operatorname{supp} g_1=\overline{\Omega}$，则对 $\overline{\Omega}$ 外一点 x，因为 $\operatorname{dist}(x,\overline{\Omega})=r>0$，故当 $ct<r$ 时，$M\{g_1\}$ 的积分区域与 $\overline{\Omega}$ 并不相交，从而在 S_{ct} 上 $g\equiv 0$，则 $tM\{g_1\}=0$．从 $t=r/c$ 开始，S_{ct} 与 $\overline{\Omega}$ 相交，而从这个时刻开始 $M\{g_1\}$ 一般不为 0．所以时刻 $t=r/c$ 是波前到达 x 的时刻．随着时间的推移到 $t=R/c$（R 是 x 到 $\overline{\Omega}$ 的最大距离）以后，S_{ct} 与 $\overline{\Omega}$ 又不相交，g_1 在 S_{ct} 上重又为0，从而 $tM\{g_1\}=0$．所以 $t=R/c$ 是 $\overline{\Omega}$ 内各点的扰动均已通过了 x 点

而传向远方的时刻. 在这以后，x 点重又恢复平静，所以 $t = R/c$ 是"波后"通过 x 的时刻. 以上的分析说明扰动传播即波具有一定的有限速度 c. 这是有关双曲方程最重要的结论.

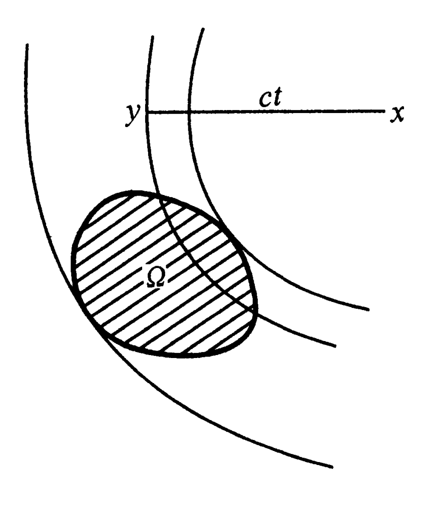


图 8—3

具有波前和明显的"波后"，这是惠更斯原理(Huygens) 的推论. 惠更斯原理告诉我们，x 点发生的波产生一个波前 S_1，而 S_1 上各点又都成为次级波源向外传播. 下一个时刻的波前，就是这些次级传播的波前的包络 S_2. 但由图 8 — 4 可见，有两个这样的包络 S_2 和 S_2'，前者向外传播而后者向内传播. 可是在物理上人们从未观察到 S_2'，这是由于干涉作用使之消失了的原故. 因此把惠更斯原理与干涉作用结合起来就可以说明波前的出现和"波后"的不出现的现象.

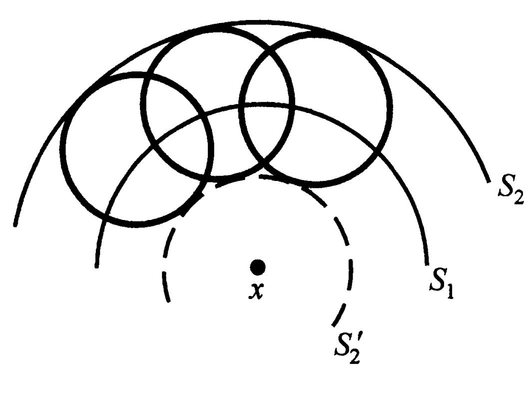


图 8 — 4

以上说明了 $tM\{g_1\}$ 描述了一个波的传播特性. 对 $\frac{\partial}{\partial t}[tM\{g_0\}]$ 自然也是一样. 再看推迟势 $\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{|x-y|\leqslant ct}\frac{f(y,t-|x-y|/c)dy}{|x-y|}$. 出现在方程右方的 f 和出现在初始条件中的 g_0，g_1 一样都是扰动源. 当然它们的量纲不同(例如，若 u 表示位移，则 g_0 具有位移量纲，g_1 具有速度量纲而 f 具有加速度量纲). 但最重要的区别在于 g_0，g_1 是 $t=0$ 时的瞬时扰动，f 则是 $t>0$ 时的持续作用的扰动. y 点的扰动要经一定的时间才能传到 x 点. 由于扰动传播速度为 c，所以在时刻 t 位于点 x 处所观察到的 $u_1(x,t)$ 的值并不取决于 $f(y,t)$ 而决定于 $f(y,t-|x-y|/c)$. 推迟势中的推迟量 $|x-y|/c$ 也是波以一定速度 c 传播的表现.

其实，这一切又都可以从基本解的支集是 $\operatorname{supp} E_+ = \{(x,t),\ |x| = ct\}$ 看出来. 因为基本解 $E_+(x,t)$ 就是初始时刻 $t=0$ 位于 $x=0$ 的扰动生成的波. $|x| = ct$ 在四维时空 (x,t) 中来看是半个圆锥，而在三维空间 $\mathbf{R}_x^3$ 中来看则是一族半径为 ct 的球面. 初始扰动在时刻 t 生成的扰动集中在 $|x| = ct$ 上，在 $|x| > ct$ 处 $E_+ \equiv 0$ 表示在那一部分空间、在时刻 t 扰动尚未到达因而是平静的. $E_+ \equiv 0$ 于 $|x| < ct$ 处，表示在该球面之内域在时刻 t 扰动已经通过从而又恢复了平静. 这表明初始扰动生成的波随时间增长而沿半圆锥 $\{(x,t);\ |x| = ct\}$ 传播，因此，称这半圆锥为光锥的理由也就很清楚了.

$n = 2$ 的情况与 $n = 3$ 就大不相同了. 这时解仍由 $tM\{g_1\}$ 等来表示. 但经降维处理后，得到的并非光锥 $|x| = ct$ 上的积分，而是其内域上的积分. 借用图 8 － 3，当 $t < r/c$ 时，积分区域与 $\overline{\Omega} = \operatorname{supp} g_1$ 不相交，因而积分为 0. 从而波前未到达时 x 点是平静的. 但当 $t > R/c$ 时，虽然光锥又与 $\overline{\Omega}$ 不相交，积分区域 $|x - y| \leqslant ct$ 却包含了整个 $\overline{\Omega}$，因此 $tM\{g_1\}$ 一般不为 0. 就是说，$n = 2$ 时没有明显的"波后". 所以当 $n = 2$ 时惠更斯原理是不成立的.

再看 $n = 1$ 的情况. 由第二章，弦振动方程的柯西问题的解是第二章(8)式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f_0(x + at) + f_0(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f_1(\tau)d\tau. \qquad (\text{将 } c \text{ 写为 } a.)$$

我们称第一项为位移波，因为它是初始位移 f_0 生成的. 同理称第二项为冲量波. 如果 f_0、f_1 都有紧支集，而且 x 是支集外的一点. 当 t 充分小时，$[x - at, x + at]$ 与这些支集均不相交而得 $u = 0$. 因此有波前的概念. 当 t 充分大时，$x \pm at$ 又都在 $\operatorname{supp} f_0$ 之外因而位移波为 0，但冲量波的积分区间包含了整个 $\operatorname{supp} f_1$，从而这一项不一定为 0. 因而整个说来没有明显的"波后". 所以，$n = 1$ 时惠更斯原理也是不成立的.

以上我们是在物理空间(x 空间中) 讨论波的传播. 在相空间((x,t) 空间) 中，原来的波前面 —— 一族以扰动点 x 为心，ct 为半径的同心球面 —— 成了以 x 为顶点的半个圆锥面 —— 前向光锥：$\{(x,t);\ |x| = ct\}$. 所以我们借用相空间的语言就把"波的传播即波前的传播"说成"波沿光锥(特征锥) 传播". 前向光锥表示 $t = 0$ 时位于 x 的扰动所生成的波前在 $t = 0$ 以后即 $t > 0$ 时影响所及之处，因此称为 x 点的影响区域. 后向光锥内的点 (x_0, t_0)，$t_0 < 0$，都有以下性质：以 (x_0, t_0) 为顶点的前向光锥必包含 $(x, 0)$ 于其内. 即是说 x 含于 (x_0, t_0) 的影响区域内，而 $(x, 0)$ 处的扰动将受到 (x_0, t_0) 的扰动的影响. 因此后向光锥称为其顶点的依赖区域. 但是在许多时候我们作一个过 (x_0, t_0) 而与 x 平面平行的平面(即 $\{t = t_0\}$) 与后向光锥相交，并称相交部分(图 8 － 5 中的阴影区域) 为顶点的依赖区域，意即顶点处的扰动依赖于该区域内的初始扰动.

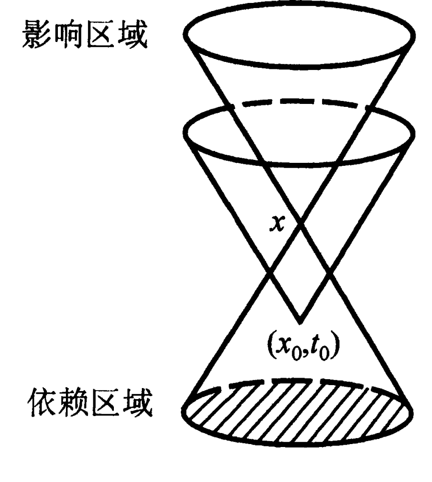


图 8 － 5

习　题

1. 证明 $\widetilde{E}_+$, $\widetilde{E}_-$ 满足方程(3).

2. 证明 $\text{sing supp}\,\delta(p(x)) = \text{supp}\,\delta(p(x)) = \{x;\ p(x) = 0\}$.

3. 证明当 $t \to 0^+$ 时有

(1)　$E_+(\cdot,t) \to 0$ ，　于 $\mathscr{S}'$ ；

(2)　$\partial_t E_+(\cdot,t) \to \delta(\cdot)$ ，　于 $\mathscr{S}'$.

4. 求柯西问题

$$\begin{cases} \Box_4 u = f(x,t), & t < 0; \\ u(x,0) = g_0(x), \\ u_t(x,0) = g_1(x) \end{cases}$$

的解.

5. 设 $w(x,t,\tau)$ 是柯西问题

$$\begin{cases} \Box_4 w = 0, & t > \tau; \\ w(x,\tau,\tau) = 0, \\ w_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

的解. 证明 $u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是柯西问题

$$\begin{cases} \Box_4 u = f(x,t), & t > 0; \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

之解. 再证明上述 $u(x,t)$ 可写为推迟势(15)，从而知道推迟势必适合齐次初始条件.

6. 证明函数

$$E(x,t) = \begin{cases} 1/2c, & c^2t^2 - x^2 \geqslant 0\ ,\ t \geqslant 0\ . \\ 0, & \text{其他地方} \end{cases}$$

是弦振动方程的基本解($x \in \mathbf{R}^1$). 设 f 充分光滑，令

$$I(x,t;f) = E(\cdot,t) * f(\cdot)\ ,$$

证明：

$$I(x,t;f) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(\xi)d\xi\ .$$

问 $\frac{\partial}{\partial t}I(x,t;f)$ 是什么？由此解出弦振动方程的柯西问题.

7. 令 $M_s(\varphi) = v(s,t)$ 为 $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)$ 在以原点为心、s 为半径的球面上的平均值，$\varphi \in C_0^\infty$.

(1) 证明：$M_s(\Delta\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)M_s(\varphi)$ ，$M_s\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_s(\varphi)$ ；

(2) 定义广义函数 $E(x_1,x_2,x_3,t)$ 为

$$\langle E\ ,\ \varphi\rangle = \int_0^\infty c^2 t M_{ct}(\varphi)\, dt, \qquad \varphi \in C_0^\infty \qquad (c > 0),$$

则 $\text{supp}\,E \subset \{(x,t);\ |x| = ct\}$，而且由(1)证明：

$$\langle \Box_4 E\ ,\varphi\rangle = \int_0^\infty \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(csM_s(\varphi)) - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(csM_s(\varphi))\right]\bigg|_{s=ct} dt\ ;$$

(3) 利用 $\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}\right)\bigg|_{s=ct} = \dfrac{1}{c}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial s}\right)\bigg|_{s=ct}$ 证明：$\langle \Box_4 E\ ,\varphi\rangle = \langle \delta\ ,\varphi\rangle$，从而 E 是 $\Box_4$ 的基本解.

8. 证明：当 $n=2$ 时，由公式(20)有

(1) $\quad tM\{g_1\} = g_1(\cdot) \underset{(\cdot)}{*} \left(\dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{H(ct-|\cdot|)}{\sqrt{c^2t^2-|\cdot|^2}}\right)$ ；

(2) 令 $E_{2+} = \dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{H(ct-|\cdot|)}{\sqrt{c^2t^2-|\cdot|^2}}$，则它为二维波动方程的基本解.

9. 利用第二章的达朗贝尔公式(8)推出一维波动方程的基本解为 $E_+(x,t) = \dfrac{1}{2}H(t-|x|) = \dfrac{1}{2}(H(t+x)-H(x-t))$ (于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x)$)，并代入方程验证之.

10. 试求以下柯西问题

$$\begin{cases} \Box_4 u = 0\ , \quad t > 0\ , \\ u|_{t=0} = f(x) + g(y)\ , \\ u_t|_{t=0} = \varphi(y) + \psi(z) \end{cases}$$

的解的表达式.

11. 用降维法直接从 $\Box_4 u = 0$ 的柯西问题解的公式导出弦振动方程柯西问题解的公式.

§ 2. 混合问题. 能量积分法

1. 弦振动方程的混合问题 对于双曲型方程，除柯西问题外，另一个具有基本重要性的问题是混合问题，即一个初边值问题，如：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \quad 0 < x < l,\ t > 0\ , \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\ , \quad 0 \leqslant x \leqslant l\ . \end{cases} \tag{22}$$

这类问题可以用傅里叶方法求解. 第七章 § 2 中介绍了这个方法. 但在 § 1 中我们已看到波动方程柯西问题的解很好地反映了波的传播，那么，可否也用波的传播来解释问题(22)的解呢？关键问题是：边值条件的出现对波的传播有什么影响.

第二章 § 1 中我们已给出，弦振动方程的解由正波和反波合成：

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)\ .$$

正波 $F(x-ct)$ 沿特征线 $x-ct=\text{const}$ 传播（即在 x 轴上以速度 c 向右传

播)，反波则沿特征线 $x + ct = \text{const}$ 传播. 为了满足边值条件 $u(0,t) = 0$ 应有

$$-F(-ct) = G(ct) \text{ 或 } -F(-T) = G(T), \tag{23}$$

这里 $T = ct$. 因此解可以表示为 $u(x,t) = F(x-ct) - F(-ct-x)$. 同样，由 $u(l,t) = 0$ 有(仍用 T 表示 ct)：

$$F(l-T) + G(l+T) = 0. \tag{24}$$

因为解是定义在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上的，所以原来的 F 和 G 也只应定义在其上. 但当 $0 \leqslant T \leqslant l$ 时有 $-l \leqslant -T \leqslant 0$，因此(23) 实际上将 F 拓展到区间 $-l \leqslant T \leqslant l$ 上了. 同时 G 也拓展到了$[-l,l]$上. 再由(24)，令 $l + T = \tau$，则 $l - T = 2l - \tau$，因此(24) 式成为 $G(\tau) = -F(2l-\tau)$，再由(23) 式即有

$$F(-\tau) = F(2l-\tau) .$$

即是说 F 还可以拓展到$[-l,l]$之外而成为一个以 $2l$ 为周期的函数. 对 G 也一样. 总之，边值条件使我们可将 F，G 拓展成以 $2l$ 为周期的函数.

再看初始条件. 这时应有

$$\varphi(x) = u(x,0) = F(x) + G(x) = F(x) - F(-x) ,$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = -c[F'(x) - G'(x)] = -c[F'(x) - F'(-x)] .$$

因此 φ、ψ 也被拓展为以 $2l$ 为周期的函数，而且是奇函数. 这样一来，边值条件提供了如何拓展初始函数的根据，而混合问题化成了以这拓展后的 φ、ψ 为初值的初值问题.

例如，我们考虑 $P(x_0,t_0)$ 处(图 8－6) 的正波，即弦上 x_0 处 t_0 时刻的正波. 由第二章所述，它应由 $P_2(-x_1,0)$ 处的正波而来，其中 $-x_1 = x_0 - ct$. 但实际上 φ、ψ 在 $-x_1$ 处本来没有定义，而是利用它们在$[0,l]$上的值进行拓展，这样，为使正波通过边界$\{x = 0\}$处仍满足边值条件 $u(0,t) = 0$，则应在$(x_1,0)$ 处有反波通过边界$\{x = 0\}$，使得与正波叠加为 0，于是初值 φ、ψ 在 $-x_1$ 处取其在 x_1 处之值反号($x_1 \in [0,l]$). 所以可以说 P_1 处的反波以速度 $-c$ 传到边界 $x = 0$ 处发生了反射(同时反号) 成了正波而在 t_0 时刻到达 x_0 处. 总之，结论就是：波在区域的边界将发生反射，反射的方式视边值条件而定.

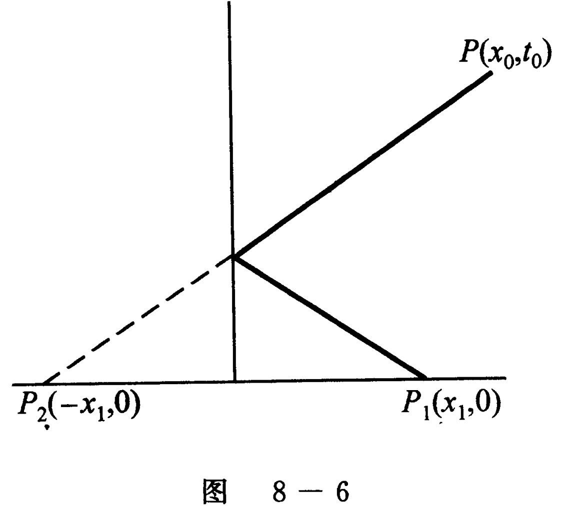


图 8－6

还可以用波的反射来解释傅里叶方法. 一个在$[0,l]$上定义的函数的以 $2l$ 为周期的奇拓展可以用正弦展开来实现. 例如对 $\varphi(x)$，$x \in [0,l]$，可拓展为

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\ (n\pi x/l)\ ,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\ (n\pi x/l)dx\ .$$

上述级数就是以 $2l$ 为周期的奇函数. 以此式和 $\psi(x)$ 的正弦展式代入达朗贝尔公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi\ ,$$

即得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\ (n\pi x/l)\cos\ (n\pi ct/l)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\ (n\pi x/l)\cos\ (n\pi ct/l)\ .$$

这正是傅里叶方法给出的结果.

2. **柯西问题解的唯一性和稳定性** 波的传播是能量的传播，以 $n=2$ 为例，在描述某些弹性系统振动的弹性波问题中，弹性位能(除一个常数因子外)是 $c^2\iint\limits_{\Omega}[u_{x_1}^2+u_{x_2}^2]dx_1dx_2$，而动能(除同一常数因子外)是 $\iint\limits_{\Omega}u_t^2dx_1dx_2$. 所以我们称 $\iint\limits_{\Omega}[\frac{1}{c^2}u_t^2+u_{x_1}^2+u_{x_2}^2]dx_1dx_2$ 为能量积分，而且把它看作是运动的某种度量.

现在考虑柯西问题

$$\begin{cases}\Box_3u\equiv\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\Delta_2u=f\ ,\\ u(x,0)=\varphi(x)\ ,\\ u_t(x,0)=\psi(x)\ .\end{cases}\qquad(25)$$

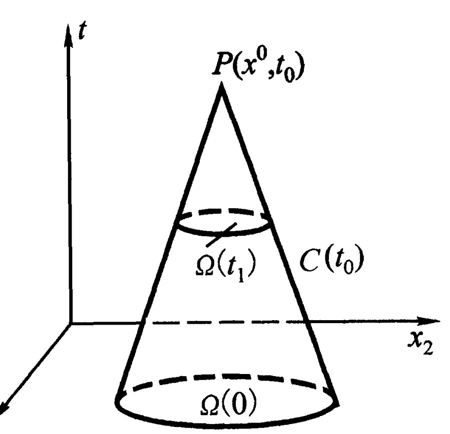


图 8－7

上面已指出，特征锥面(即光锥)将起重要的作用. 我们取以 (x^0,t_0) 为顶点的后向光锥 $\{(x,t);\ c^2(t-t_0)^2=(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2,\ t\leqslant t_0\}$ 与平面 $\{t=0\}$ 所围的区域为 $C(t_0)$，记其侧表面为 Γ，$C(t_0)$ 与平面 $\{t=t_1\}$ 之截口为 $\Omega(t_1)$，$C(t_0)$ 的含于 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 的部分——锥台为 $C(t_1)$(见图 8－7)，并且考虑时刻 t 的能量积分(或称能量范数)

$$I(t)=\iint\limits_{\Omega(t)}[u_t^2+c^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]dx_1dx_2.\qquad(26)$$

由于波沿光锥传播，由 $\Omega(0)$ 中的初始扰动 φ、ψ 以及 $C(t)$ 内的持续扰动 f 生

成的能量将被限于 $\Omega(0)$ 的影响区域内. 由于依赖区域 $C(t)$ 只是影响区域的一部分，所以从物理上应该很明白：$I(t)$ 将随 t 上升而下降. 下面有一个相应于此的定理.

定理 8.2.1.　*若 $u\in C^1(\bar{C}(t))\cap C^2(C(t))$ 是柯西问题 (25) 之解，且 f、φ、ψ 皆充分光滑，则必有常数 $K>0$ 使得对 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 有*

$$I(t)\leqslant K\Big[I(0)+\iiint\limits_{C(t)} f^2 dt dx_1 dx_2\Big]. \tag{27}$$

证　方程两边乘 u_t，经过简单的计算可以化为下式：

$$\begin{aligned}u_t f &= u_t\Box_3 u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^{\,2})\\&\quad -c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(u_{x_1}u_t)+\frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_2}u_t)-u_{x_1}u_{x_1t}-u_{x_2}u_{x_2t}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[u_t^2+c^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]-2c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(u_{x_1}u_t)+\frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_2}u_t)\right)\right\}.\end{aligned} \tag{28}$$

两边在 $C(t)$ 上积分，并用高斯公式将散度化为 $C(t)$ 表面上的积分. 表面可分为三个部分：侧面 Γ，记其外法向量为 $\boldsymbol{n}$；上底 $\Omega(t)$，其外法线方向是 t 轴正向；下底 $\Omega(0)$，其外法线方向是 $-t$ 方向. 因此表面上的积分也可分为三项：

$$J_1=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega(t)}[u_t^2+c^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]dx_1dx_2, \qquad\text{(上底)}$$

$$\begin{aligned}J_2=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Gamma}&\{[u_t^2+c^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]\cos(\boldsymbol{n},t)\\&-2c^2[(u_{x_1}u_t)\cos(\boldsymbol{n},x_1)+(u_{x_2}u_t)\cos(\boldsymbol{n},x_2)]\}dS,\end{aligned} \qquad\text{(侧面)}$$

$$J_3=-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega(0)}[u_t^2+c^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]dx_1dx_2, \qquad\text{(下底)}$$

现在讨论 J_2 的符号. 由于 Γ 的方程是 $c^2(t-t_0)^2-(x_1-x_1^0)^2-(x_2-x_2^0)^2=0$，通过求法线方向余弦便可证明在 Γ 上

$$\cos^2(\boldsymbol{n},t)-c^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_1)-c^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_2)=0, \tag{29}$$

所以它的被积函数可化为

$$\begin{aligned}&[2\cos(\boldsymbol{n},t)]^{-1}\{[u_t^2c^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_1)-2c^2u_tu_{x_1}\cos(\boldsymbol{n},x_1)\cos(\boldsymbol{n},t)\\&+c^2u_{x_1}^2\cos^2(\boldsymbol{n},t)]+[u_t^2c^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_2)-2c^2u_tu_{x_2}\cos(\boldsymbol{n},x_2)\cos(\boldsymbol{n},t)\\&+c^2u_{x_2}^2\cos^2(\boldsymbol{n},t)]\}=[2\cos(\boldsymbol{n},t)]^{-1}c^2\{[u_t\cos(\boldsymbol{n},x_1)\\&-u_{x_1}\cos(\boldsymbol{n},t)]^2+[u_t\cos(\boldsymbol{n},x_2)-u_{x_2}\cos(\boldsymbol{n},t)]^2\}\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $J_2\geqslant 0$. 代回积分后的(28) 式有

$$\iiint\limits_{C(t)} fu_t d\tau dx_1 dx_2 = J_1 + J_2 + J_3 \geqslant J_1 + J_3 = \frac{1}{2}[I(t) - I(0)].$$

因为 $2AB \leqslant A^2 + B^2$，以 u_t 作 A，f 作 B，则有

$$I(t) \leqslant I(0) + \iiint\limits_{C(t)} u_t^2 d\tau dx_1 dx_2 + \iiint\limits_{C(t)} f^2 d\tau dx_1 dx_2. \tag{30}$$

我们记

$$\mathscr{I}(t) = \iiint\limits_{C(t)} [u_t^2 + c^2(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)] d\tau dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^t I(\tau)\, d\tau,$$

则

$$I(t) = \frac{d}{dt}\mathscr{I}(t), \qquad \mathscr{I}(0) = 0.$$

由初始条件

$$I(0) = \iint\limits_{\Omega(0)} (u_t^2 + c^2 u_{x_1}^2 + c^2 u_{x_2}^2) dx_1 dx_2$$

$$= \iint\limits_{\Omega(0)} [\psi^2 + c^2 |\text{grad}\ \varphi|^2] dx_1 dx_2,$$

记 $\iiint\limits_{C(t)} f^2 d\tau dx_1 dx_2 = F(t)$，注意到 $\iiint\limits_{C(t)} u_t^2 d\tau dx_1 dx_2 \leqslant \mathscr{I}(t)$，则(30) 给出

$$\frac{d}{dt}\mathscr{I}(t) \leqslant \mathscr{I}(t) + I(0) + F(t), \qquad \mathscr{I}(0) = 0. \tag{31}$$

用下面即将证明的格朗沃尔(Gronwall) 不等式，即可得

$$\mathscr{I}(t) \leqslant \int_0^t \exp(t-\tau)(I(0) + F(\tau))(\tau) d\tau.$$

注意到 $F(\tau)$ 是 τ 的非减函数，即有

$$\mathscr{I}(t) \leqslant (I(0) + F(t)) \int_0^t e^{(t-\tau)} d\tau \leqslant (I(0) + F(t)) e^{t_0}. \tag{32}$$

代回(30) 有

$$I(t) \leqslant I(0) + \mathscr{I}(t) + F(t) \leqslant (1 + e^{t_0})[I(0) + F(t)].$$

取 $K = 1 + e^{t_0}$，即获得(27). 定理证毕.

上面讲到的格朗沃尔(Gronwall) 不等式是一个简单而常用的不等式. 它在各种能量估计中十分重要. 现证明如下：

引理 8.2.2. (**格朗沃尔**(Gronwall) **不等式**). 若 $U(t) \in C^1([0,T])$，$F \in C([0,T])$，且

$$\frac{d}{dt}U(t) \leqslant aU(t) + F(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{$*$}$$

则有

$$U(t) \leqslant U(0)\exp(at) + \int_0^t F(\tau)\exp\{a(t-\tau)\}d\tau .$$

证 用 $\exp(-at)$ 乘不等式(*)两边得

$$\frac{d}{at}[U(t)\exp(-at)] \leqslant F(t)\exp(-at) .$$

两边从 0 到 t 求积分即得引理.

定理 8.2.1 是基本的能量估计. 在讨论双曲型方程(实际上几乎一切偏微分方程)时总要在不同范数下去估计解, 也就是把解放在不同空间中去估计. 形如定理 8.2.1 的估计是以能量为范数来进行的, 也就是把 u 放在索波列夫空间来进行的. 在许多时侯我们还需要在 L^2 范数或 C 范数(即连续函数空间范数)下估计解, 这里不再详述.

由能量估计即可得到

定理 8.2.3 *柯西问题(25)之解在 $C^1(\overline{C}(t)) \cap C^2(C(t))$ 中是唯一的, 而且在能量范数意义下连续依赖于 φ、ψ 和 f.*

证 这是自明的, 只需记住, 唯一性是指当 $f=\varphi=\psi=0$ 时, 必有 $u=0$, 而连续依赖性是指当 $\iiint\limits_{C(t)} f^2 d\tau dx_1 dx_2$ 和 $\iint\limits_{\Omega(0)} [\psi^2 + c^2|\text{grad}\varphi|^2]dx_1dx_2$ 充分小时, $\iint\limits_{\Omega(t)} [u_t^2 + c^2u_{x_1}^2 + c^2u_{x_2}^2]dx_1dx_2$ 也充分小. 而这从(27)立即可得. 事实上, 当 $f=\varphi=\psi=0$ 时, 由(27)及 $u \in C^2(\Omega)$ 便可得 $\text{grad}\, u(t,x_1,x_2)=0$, 即在 $C(t)$ 内 $u=$ 常数 $=\varphi=0$.

也可以证明 u 在 C 范数下连续依赖于 φ、ψ、f, 这里也不细讲了.

另外, 由于特征锥顶点 (x^0,t_0) 的任意性, 即有 $C(t)$ 的任意性, 则可得在 $\mathbf{R}_+^3$ 上柯西问题(25)是唯一的.

3. 混合问题的唯一性与稳定性 现在把能量估计用到下面的混合问题. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}_x^2$ 为有界区域, $\partial\Omega$ 为其边界, 讨论混合问题:

$$\begin{cases} \Box_3 u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = f , \\ u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+ , \\ u(x,0) = \varphi(x) , \quad u_t(x,0) = \psi(x) . \end{cases} \tag{33}$$

此时, 记 $C(t)$ 为柱形区域 $\Omega \times [0,t]$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 且 $C=C(T)$, $\Omega(t)=\{(x,t);\ x\in\Omega\}$, 则可如(26)式一样定义时刻 t 的能量积分 $I(t)$, 于是有

定 理 8.2.4. *若 $u(x,t) \in C^1(\overline{C}) \cap C^2(C)$ 是混合问题(33)之解, 则必存在常数 $M>0$ 使得*

$$I(t) \leqslant M[I(0) + \iiint\limits_{C(t)} (f(\tau,x_1,x_2))^2 d\tau dx_1 dx_2] . \tag{34}$$

特别是若 $f=0$，还有

$$I(t)=I(0).$$

这里设 φ、ψ 和 f 充分光滑.

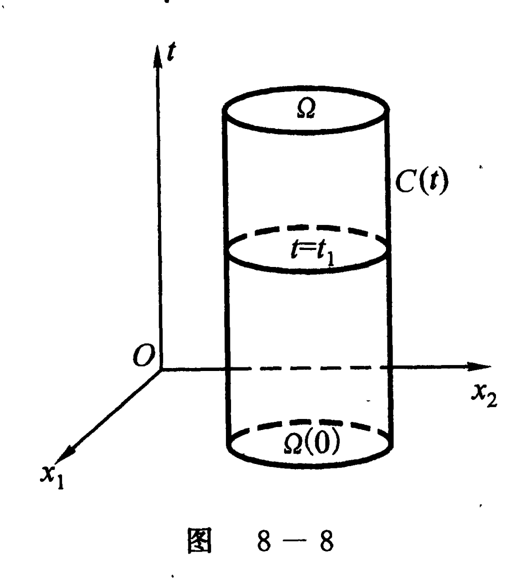


图 8－8

证 证明与定理 8.2.1 的证明十分类似，所以我们的叙述将比较简略，而只在有不同处加一些说明.

用 u_t 去乘 $\square_3 u=f$ 并且在 $C(t)$ 上积分，利用高斯定理有

$$J_1+J_2+J_3=\iiint\limits_{C(t)} fu_t\,d\tau\,dx_1\,dx_2.$$

其中积分 J_1，J_2，J_3 的被积函数与定理 8.2.1 相同，但 J_2 现在是在柱形区域的侧面 Γ 上的积分，因为在 Γ 上 $\cos(\boldsymbol{n},t)=0$，$u|_\Gamma=0$ 从而 $u_t|_\Gamma=0$，故 $J_2=0$，而 $J_1=\frac{1}{2}I(t)$，$J_3=-\frac{1}{2}I(0)$，所以有

$$I(t)=I(0)+2\iiint\limits_{C(t)} f^2 d\tau dx_1 dx_2.$$

若 $f=0$ 即得定理的后一部分，若 $f\neq 0$ 则又与定理 8.2.1 证明中的(30)一样，有

$$I(t)\leqslant I(0)+\iiint\limits_{C(t)} u_t^2 d\tau dx_1 dx_2+\iiint\limits_{C(t)} f^2 d\tau dx_1 dx_2. \tag{35}$$

同样，令

$$\mathscr{I}(t)=\int_0^t I(\tau)d\tau=\iiint\limits_{C(t)}\left[u_t^2+c^2u_{x_1}^2+c^2u_{x_2}^2\right]d\tau dx_1 dx_2.$$

以下的证明和定理 8.2.1 完全一样：应用格朗沃尔不等式，得到与(32)相应的不等式

$$\mathscr{I}(t)\leqslant (I(0)+F(t))\int_0^t e^{(t-\tau)}d\tau\leqslant (I(0)+F(t))e^T. \tag{32$'$}$$

代回(35)，并考虑到 $\iiint\limits_{C(t)} u_t^2 d\tau dx_1 dx_2\leqslant\mathscr{I}(t)$，则有不等式(34)成立，其中 $M=1+e^T$. 定理证毕.

综合一下定理 8.2.1 和定理 8.2.4 的证明，我们发现，都是对(28)式两边积分，且都要估计 J_2 的符号，即要求 $J_2\geqslant 0$；不同的是在定理 8.2.1 中，积分区域 $C(t)$ 为特征锥内时间从 0 到 t 部分之锥台，而在定理 8.2.4 中，积分区域 $C(t)$ 为柱体内时间从 0 到 t 部分. 显然，在定理 8.2.4 中，若把边值条件

$u|_{\partial\Omega}=0$ 换为 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$，仍可得积分 $J_2=0$，故定理仍然成立. 并且可推断，当 Ω 为半无界区域时，能量积分的积分区域 $C(t)$ 为柱面 $\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$ 与特征锥面所围在 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 内时间从 0 到 t 部分的区域. 且若方程是变系数时，相应的特征锥面亦有变化(非直锥面). 对(28)式进行积分，由高斯公式化为 $J_1=\frac{1}{2}I(t)$，$J_3=\frac{1}{2}I(0)$. 显然，对一般双曲方程，同样为使 $J_1=\frac{1}{2}I(t)$，$J_3=\frac{1}{2}I(0)$，则 $I(t)$ 的定义应相应变化. 对于第三边值条件的混合问题，$J_2\geqslant 0$ 一般并不成立，但此时，可将 J_2 分解为一部分 $\geqslant 0$，另一部分与 $t=0$ 及 $\tau=t$ 有关，使其并入 J_1 及 J_3 中，这样可修正 $I(t)$ 的定义，使它不但包含在 $\Omega(t)$ 上的积分，且还包含在 $\partial\Omega(t)$ 上的积分. 这便要求我们对不同的数学物理问题作具体分析，寻找相应的能量函数. 这里，灵活地运用能量方法有很大的技巧.

由定理 8.2.4 便可获得如下唯一性及稳定性定理.

定理 8.2.5　混合问题(33)的 $C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是唯一的，而且在能量范数意义下连续依赖于 φ、ψ 和 f.

习　　题

1. 用波的传播来讨论弦振动方程的解在边值条件 $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$ 时在端点的反射.

2. 同样，用波在端点的反射来求解半无界弦振动问题，其边值条件为 $u(0,t)=0$，即求解

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<\infty,\ t>0,\\ u(0,t)=0, & \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x). & \end{cases}$$

3. 将定理 8.2.1 的不等式对 t 由 0 到 t 积分得出另一形式的能量估计：

$$\iiint\limits_{C(t)}\left[u_t^2+c^2u_{x_1}^2+c^2u_{x_2}^2\right]d\tau dx_1dx_2$$
$$\leqslant M\left[\iint\limits_{\Omega(0)}\left[u_t^2+c^2u_{x_1}^2+c^2u_{x_2}^2\right]dx_1dx_2+\iiint\limits_{C(t)}f^2d\tau dx_1dx_2\right].$$

4. 分别求证混合问题(33)及柯西问题(25)的解的 L^2 估计：

(1) 令 $J(t)=\iint\limits_{\Omega}u^2dx_1dx_2$，证明在柱体 $\Omega\times[0,T]$ 中有

$$\frac{d}{dt}J(t)\leqslant \varepsilon J(t)+F(t),\ F(t)=\varepsilon^{-1}\iiint_{\Omega} u_t^2 dt dx_1 dx_2.$$

再由格朗沃尔不等式证明

$$J(t)\leqslant J(0)\exp(\varepsilon t)+\varepsilon^{-1}\exp(\varepsilon t)\iiint_{\Omega\times[0,T]} u_t^2 dt dx_1 dx_2.$$

(2) 利用第 3 题证明

$$\iiint_{C(t)} u^2 d\tau dx_1 dx_2 \leqslant M\left\{J(0)+\iiint_{C(t)} f^2 d\tau dx_1 dx_2\right\}.$$

5. 求证弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ 0<t<T,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

的解对 φ、ψ 在 C 范数下的连续依赖性:

(1) 仿照定理 8.2.4 证明

$$\int_0^l\left(u_x^2+\frac{1}{c^2}u_t^2\right)dx=\int_0^l\left(\varphi_x^2+\frac{1}{c^2}\psi^2\right)dx.$$

(2) 若 φ、φ_x、ψ 在 $[0,l]$ 中一致地充分小, 证明

$$|u(x,t)-u(0,t)|\leqslant c\left[\int_0^l \varphi_x^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant c\varepsilon,$$

ε 是任意小的数, 由此即得本题的证明.

6. 设 $Q=\{(x,t);\ x\in(a,b),\ 0<t<T\}$, $u\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$ 满足混合问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[m(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]+n(x)u+p(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(x,t), \\ u(a,t)=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(b,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x).\end{cases}$$

其中 $m(x)$, $n(x)$, $p(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的正连续函数, 记时刻 t 的能量为

$$I(t)=\int_a^b\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+m(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+n(x)u^2\right]dx.$$

证明有能量不等式:

$$I(t)\leqslant M\left(I(0)+\int_0^t d\tau\int_a^b f^2(x,\tau)dx\right).$$

[提示: 方程两边乘 u_t 再在 $[a,b]$ 上积分, 利用边值条件证明不等式 $\frac{d}{dt}I(t)\leqslant I(t)+\int_0^t d\tau\int_a^b f^2(x,\tau)dx$, 然后应用格朗沃尔不等式即可.]

7. 设 $\Omega=\{(x,y);\ x>y^2\}$. 混合问题为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y,t), & (x,y)\in\Omega,\ t>0, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \quad t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x).\end{cases}$$

试定义上述混合问题在时刻 t 的能量，并证明其能量不等式，从而证明混合问题在 $C^2(\Omega\times\mathbf{R}_+)\cap C^1(\overline{\Omega\cap\mathbf{R}_+})$ 中的解是唯一的.

§3. 特征的概念

1. **弱间断与特征** 在以上的讨论中我们看到了特征概念起了极重要的作用. 它实际上是整个偏微分方程理论最重要的概念之一. 由于我们没有讨论过一阶偏微分方程的理论，我们只能就本书的范围涉及到的问题讨论特征理论的几个侧面.

先从定义开始. 设有 m 阶线性偏微分算子

$$P(x,D),\quad D=\frac{1}{i}\partial_x,\quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n. \tag{36}$$

记它的主象征为 $P_m(x,\xi)$. 第五章中给出了特征集的概念:

$$\mathrm{Char}P=\{(x,\xi);\ P_m(x,\xi)=0,\ x\in\Omega,\ \xi\neq 0\}.$$

设有 $\mathbf{R}^n$ 中的曲面 $\{x;\ \varphi(x)=0,\ \mathrm{grad}\varphi\neq 0\}$. 相应于其上任一点都有法线向量 $\mathrm{grad}\varphi$，我们有时称 $(x,\mathrm{grad}\varphi)$ 为此曲面上的接触元素，而给出

定义 8.3.1 *若曲面 $\Gamma=\{x;\ \varphi(x)=0,\ \mathrm{grad}\varphi\neq 0\}$ 上任意的点 x 处其 $(x,\mathrm{grad}\varphi)$ 皆在 $\mathrm{Char}P$ 中，即当 $\varphi(x)=0$ 时有*

$$P_m(x,\mathrm{grad}\varphi)=0, \tag{37}$$

就称 Γ 是 P 的特征曲面. 而且称(37)是 P 的特征方程.

可见特征曲面由主象征决定. 这里要注意，(37) 式并不是一个一阶偏微分方程，因为并不要求它在 $\mathbf{R}^n$ 的某区域上成立，而只要求它在某一曲面 $\{\varphi(x)=0\}$ 上成立. 以波动方程 $\square_{n+1}u=0$ 为例. 这时

$$P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)\equiv -c^2\left[\frac{1}{c^2}\varphi_t^2-\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}^2\right].$$

先看 $n=2$，令 $\varphi(x,t)=c^2t^2-(x_1^2+x_2^2)$，则

$$P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)=-4c^2[c^2t^2-(x_1^2+x_2^2)].$$

所以只在 $\varphi=0$ 上有 $P_2=0$. 这里我们得出了前述的光锥或特征锥面. 但它与定义有一点不同，即 $\mathrm{grad}\varphi\neq 0$ 在 $(0,0,0)$ 被破坏. 这就是锥顶. 所以我们得到的是一个有奇点的特征锥面. 但在 $n=1$ 时，若令 $\varphi=ct\pm x$，则有 $P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)=1-1=0$. 这就是弦振动方程的特征线. 这时 $P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)=0$ 不只在 $\varphi=0$ 上成立，而是在 $\mathbf{R}^2$ 中处处成立.

(37) 不是一个偏微分方程时常带来一些困难. 但有这样的情况：存在一

族特征曲面$\varphi(x)=c$，而过区域Ω中每一点x_0皆有族中一个特征曲面$\varphi(x)=\varphi(x_0)$．若令$\psi=\varphi(x)-\varphi(x_0)$．则$\varphi_x=\psi_x$．而曲面$\varphi(x)=\varphi(x_0)$成为$\psi=0$．所以，$P_m(x,\varphi_x)=0$于$\psi=0$上．因为$x=x_0$在此曲面上，由于$x_0$的任意性，对$\varphi$而言就有$P_m(x,\varphi_x)=0$于$\Omega$中．所以我们可以将$P_m(x,\varphi_x)=0$(即(37)式)作为一个一阶偏微分方程去求解而求出$\varphi(x)$．这时不但$\varphi(x)=0$而且$\varphi(x)=c$都是特征曲面．关键在于要找到特征曲面的写法，即写成$\varphi(x)=0$使得$\varphi(x)=c$是一族特征曲面．仍以$\Box_{2+1}u=0$为例，若将光锥写成$c^2t^2-(x_1^2+x_2^2)=0$，则$\varphi(x,t)\equiv c^2t^2-(x_1^2+x^2)$，这时$P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)=-4[c^2t^2-(x_1^2+x_2^2)]$，只在$\varphi=0$上有$P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)=0$，所以不能由$P_2=0$作为一阶偏微分方程来解．但若将光锥写成$ct\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2}=0$，则$\varphi(x,t)\equiv ct\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，易见$P_2(x,\mathrm{grad}\varphi)\equiv 0$．所以仍可将(37)作为一个一阶偏微分方程求解而得一族特征锥面$ct\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2}=C_1$．它的顶点是$(0,0,t_0)$，$t_0=C_1/c$．因此实际去求特征曲面时，我们常将(37)作为一个一阶偏微分方程去求解．

现在回到波的传播．前面已经说过，由于有影响区域，所以由(x_1^0,x_2^0,t_0)的扰动产生的波在该影响区域之外恒为0．这样就出现了一个间断，线性偏微分方程的解的间断面有的是特征曲面，有的则不是．但所谓弱间断一定是特征曲面．弱间断的定义是：

定义 8.3.2　*设$\Gamma=\{x;\varphi(x)=0\}$是一光滑曲面，在$\Gamma$上$\mathrm{grad}\varphi\neq 0$．若$u$是$m$阶线性偏微分方程在$\Omega\backslash\Gamma$中的解，它在$\Omega\backslash\Gamma$中属于$C^m$，而在$\Gamma$上除对$u$的任意$m$阶的斜截微商①有第一类间断外，对其余$D_x^\alpha u(|\alpha|\leqslant m)$都是连续的，则称此解$u$在$\Gamma$具有弱间断，并称$\Gamma$为$u$的弱间断面．*

定理 8.3.3.　*弱间断面Γ必为特征曲面．*

证　作变量变换$y=y(x)$而令$y_1=\varphi(x)$，由于在Γ上$\mathrm{grad}\varphi\neq 0$，所以这个变换是可以找到的．$\Gamma$成为$\{y_1=0\}$，而$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$可用$\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}$线性表示．因为只有$\frac{\partial}{\partial y_1}$对$\Gamma=\{y_1=0\}$是斜截(它是法向的)微商，而其余一切$\frac{\partial}{\partial y_j}(j\neq 1)$对$\Gamma=\{y_1=0\}$是切向微商，由假设$\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}$在$\Gamma$上有第一类间断，而对其余$\frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha}(|\alpha|\leqslant m,\ \alpha_1<m)$，因斜截微商的阶数小于$m$，在$\Gamma$附近都是连续的．于是$\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}$在$\Gamma$两侧当$y_1\to 0^\pm$时有极限$\left.\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right|_\pm$，且其跃度

① 即非切向的方向微商．

$\left[\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right]=\left.\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right|_+ - \left.\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right|_- \neq 0$(一般地我们记$[f]=f|_+ - f|_- = \lim\limits_{y_1\to 0^+} f(y) - \lim\limits_{y_1\to 0^-} f(y)$，如果这里极限存在的话)．因此弱间断条件告诉我们，对$|\alpha|\leqslant m$，$\left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha}\right]=0$，除非$\alpha=(m,0,\cdots,0)$，即$\left[\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right]\neq 0$.

作变量变换后

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial y_1^{|\alpha|}}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^\alpha+\cdots$$

"…"中各项对y_1的微商次数$\leqslant |\alpha|-1$. 因此

$$\begin{aligned}0=P(x,D)u &= \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x(y))\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial y_1^{|\alpha|}}+\cdots\right]\\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x(y))\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^\alpha \frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}+\cdots.\end{aligned} \tag{38}$$

"…"中各项对y_1的微商次数$\leqslant m-1$.

令$y_1\to 0^\pm$在(38)式中取极限并取两极限之差．由于"…"在Γ两侧是连续的，所以

$$0=\left.\left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^\alpha\right)\right|_{y_1=0}\left[\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right],$$

由于$\left[\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right]\neq 0$，故其系数为0，这就是$P_m(x,\mathrm{grad}\,\varphi)|_\Gamma=0$，定理证毕.

2. **广义柯西问题** 我们比较波动方程和热传导方程的柯西问题．初始数据都给在$t=0$上．但对前者可给两个数据(与方程阶数一致)，即$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}$ $(j=0,1)$之值，这里微商$\frac{\partial}{\partial t}$是斜截于$\{t=0\}$的；对后者则只给一个数据，即一个斜截方向的微商$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}$，$j=0$. 为什么会出现这样的区别？问题在于$t=0$对波动方程不是特征曲面，而对热传导方程则是特征曲面.

这就给了一个启发：对一般的m阶线性偏微分方程

$$P(x,D)u=f, \tag{39}$$

如果曲面$\Gamma=\{\varphi(x)=0\}$ (在Γ上设$\mathrm{grad}\varphi\neq 0$)不是特征曲面，是否可以提出广义柯西问题，即在$\Gamma$上给出前$m$个斜截方向的微商，例如

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial l^j}\right|_\Gamma = g_j,\quad j=0,1,\cdots,m-1, \tag{40}$$

$\frac{\partial}{\partial l}$斜截于$\Gamma$. 首先要注意，在给出$\left.\frac{\partial^j u}{\partial l^j}\right|_\Gamma$后，若$\frac{\partial}{\partial s}$是$\Gamma$的某切向微商，则

$\left.\dfrac{\partial^{j+k}u}{\partial l^j\partial s^k}\right|_\Gamma=\dfrac{\partial^k g_j}{\partial s^k}$也是已知的. 实际上用这样方法能算出$u$的一切$\leqslant m$阶的微商在$\Gamma$上的值，唯一的例外是$\left.\dfrac{\partial^m u}{\partial l^m}\right|_\Gamma$. 因此，若作变量变换$y=y(x)$，而令$y_1=\varphi(x)$. 则$\left.\dfrac{\partial^j u}{\partial y_1^j}\right|_{y_1=0}=h_j$, $j=0,1,\cdots,m-1$，都可以从(40)式中求出，但$\left.\dfrac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right|_{y_1=0}$不行. 即有

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial y_1^j}\right|_{y_1=0}=h_j,\quad j=0,1,\cdots,m-1. \tag{41}$$

再看方程，利用前面讲的(38)式知有

$$P_m(x,\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}+\cdots=f,$$

因为$P_m(x,\operatorname{grad}\varphi)$在$\Gamma$上不为0，从而在$\Gamma$附近也不为0，所以方程可能化为

$$\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}+\cdots=F. \tag{42}$$

"…"中只含u对y_1的低于m阶的微商. 于是广义柯西问题(39)、(40)变成了普通的柯西问题(42)、(41). 但若Γ是特征曲面，上面的广义柯西问题就不可能这样化约了.

3. **化为标准形** 第五章中提到，两个自变量的二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cdots=0 \tag{43}$$

可以局部地化为标准形，现在来讨论其作法.

作变量变换

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y),$$

则由(38)式(或直接计算)可知，(43)式可化为

$$(a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2[a\varphi_x\psi_x+b(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)$$
$$+c\varphi_y\psi_y]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+\psi_y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\cdots=0. \tag{44}$$

如果$\{\varphi=C\}$对一切C皆为特征，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$的系数为0；如果$\{\psi=C\}$为特征，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$的系数也为0. 但在第一段就说过，只要把$a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0$作为一阶偏微分方程来解即可使$\{\varphi=C\}$对一切$C$皆为特征.

但是，求解两个自变量的一阶偏微分方程可以化为常微分方程的求解. 事实上，$\varphi(x,y)=C$是一族曲线，其切线斜率$\dfrac{dy}{dx}$应适合

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0 .$$

即$\frac{dy}{dx} = -\varphi_x/\varphi_y$. 以 φ_y^2遍除 $a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$ 即得

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 . \tag{45}$$

现在局部地(即在一开区域内)分别三种情况.

(1)$b^2 - ac > 0$. 这时(45)式可分解因式为

$$\left(\frac{dy}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - \lambda_2\right) = 0 , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

例如求解$\frac{dy}{dx} = \lambda_1$，得到 $y = y_1(x,C)$，解出 C 后即得常微分方程的通积分 $\varphi(x,y) = C$. 由它作出 $\xi = \varphi(x,y)$. 同理由$\frac{dy}{dx} = \lambda_2$ 的通积分 $\psi(x,y) = C$ 可得 $\eta = \psi(x,y)$.

这样得出变量变换是合理的. 因为

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = \varphi_x\psi_x(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 .$$

(这里 $\varphi_x \neq 0$，否则可用 φ_y 代替 φ_x. 若 $\varphi_x = \varphi_y = 0$ 则与 $\mathrm{grad}\varphi \neq 0$ 矛盾，同理 $\psi_x \neq 0$). $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ 的系数不会为 0，否则在作变换时方程降阶，则作逆变换(这是一定可以作的，要求$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ 的目的在此) 后将会升阶，这当然是不可能的. 总之，方程化成了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \cdots = 0 .$$

再令 $X = \xi + \eta$, $Y = \xi - \eta$ 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \cdots = 0 .$$

按第五章 §5 的定义，这是双曲型的. 它有两组实特征.

(2)$b^2 - ac = 0$. 这时 $\lambda_1 = \lambda_2$，解$\frac{dy}{dx} = \lambda_1$ 得 $\xi = \varphi(x,y)$. 但由$\frac{dy}{dx} = \lambda_2$ 得不出 $\eta = \psi(x,y)$. 因为这样得出的 η 会使$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = 0$，而不成其为变量变换.

但是我们可取任意的ψ作为η，只要$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$. 作了这样的变换后，$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ 的系数为 0. 易证$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ 的系数也为 0，因为它是

$$a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y$$

$$= a(\varphi_x + \frac{b}{a}\varphi_y)\psi_x + b(\varphi_x + \frac{c}{b}\varphi_y)\psi_y$$

$$=a(\varphi_x+\lambda_1\varphi_y)\psi_x+b(\varphi_x+\lambda_1\varphi_y)\psi_y=0,$$

$$\lambda_1=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}.$$

总之方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(\text{一阶项})=0.$$

如果一阶项中$\frac{\partial u}{\partial \xi}$的系数不为0，这是抛物型方程. 第五章中的抛物型方程如热传导方程就是这样. 否则，方程将化为含参变量ξ的常微分方程，这便是弱双曲型方程. 这里还应注意条件$b^2-ac=0$应是局部地满足，不能只在某一曲线上满足.

(3)$b^2-ac<0$. 这时$\frac{dy}{dx}=\lambda_1$取复值，因此进入复域. 复域中的常微分方程理论要求在解析函数类中讨论问题，因此我们需设a，b，c皆为x，y的解析函数. $\frac{dy}{dx}=\lambda_1$的通积分$\Phi(x,y)=C$也是复的. 令$\xi=\mathrm{Re}\,\Phi,\eta=\mathrm{Im}\,\Phi$，由$a\Phi_x^2+2b\Phi_x\Phi_y+x\Phi_y^2=0$分开实虚部有

$$a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c^2\eta_y^2\neq 0,$$

$$a\xi_x\eta_x+b(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c\xi_y\eta_y=0.$$

(前式不能为0，否则又会发生在变量变换后降阶. $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$的证明略去.)

总之(44)式化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\cdots=0.$$

这是椭圆型方程，它没有实特征.

总之，方程的分类是以特征为基础的，而且这时可以(局部地)由b^2-ac的符号直接决定其类型. 有时$b^2-ac=0$表示一条曲线，而在曲线的两侧方程可能是双曲型的或者是椭圆型的(例如特里柯米方程)，则称方程在上述曲线上是脱缩的. 两个自变量的二阶线性偏微分方程恒可局部地化为标准形，说它是局部的是因为$\frac{dy}{dx}=\lambda_j$只是局部地有解.

习　题

1. 求下列方程的特征方程：

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}$；

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$；

(3) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b^4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+e^{x+y+z}\frac{\partial u}{\partial x}=u$;

(5) $\frac{\partial u}{\partial x}-\sin(xy)\frac{\partial u}{\partial y}+3u=0$.

2. 将广义柯西问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0\ ,\\ u|_{t=2x+y}=\varphi(x,y)\ ,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=2x+y}=\psi(x,y)\end{cases}$$

化为普通柯西问题.

3. 说明广义柯西问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\ ,\\ u|_{x=at}=\varphi(x)\ ,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=at}=\psi(x)\end{cases}$$

的解或者不存在，或者不唯一.

4. 化下列方程为标准形式：

(1) $u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+u_x-u_y=0$;

(2) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$;

(3) $yu^{xx}+(x+y)u_{xy}+xu_{yy}=0$.

5. 在 $y>0$ 与 $y<0$ 处分别化特里柯米方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

为标准形.

参 考 文 献

[1]姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,易法槐. 数学物理方程讲义(第二版). 北京:高等教育出版社,1996

[2]李大潜,秦铁虎. 物理学与偏微分方程,上册. 北京:高等教育出版,1997

[3]崔志勇,金德俊,卢喜观. 线性偏微分方程引论. 吉林大学出版社,1991

[4]柯朗 R,希尔伯特 D. 数学物理方法:卷 Ⅰ. 钱敏,郭敦仁译. 北京:科学出版社,1958

[5]柯朗 R,希尔伯特 D. 数学物理方法:卷 Ⅱ. 熊振翔,杨应辰译. 北京:科学出版社,1977

[6]巴罗斯—尼托 J. 广义函数引论. 欧阳光中,朱学炎译. 上海:上海科学技术出版社,1981

[7]Folland G B. 偏微分方程引论. 齐民友 等译. 北京:高等教育出版,1988

[8]Kanwal R P. Generalized Functions. Academic Press,1983

[9]Ladyzhenskaya O A. The boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer-Verlag,1983

名 词 索 引

（名词后的数字是该名词出现的页码）

$C_0^\infty(\Omega)$ 15

$\mathscr{D}(\Omega)$ 16

$\mathscr{D}'(\Omega)$ 23

$\mathscr{E}(\Omega)$ 42

$\mathscr{E}'(\Omega)$ 42

L^1 函数的傅里叶变换 71

L^2 函数的傅里叶变换 74

Lax-Milgram 定理 114

δ- 函数 9

B

半平面的格林函数 100

边值问题 6,97

边值条件 6,97

标准形 155

博雷尔(Borel)定理 21

泊松(Poisson)方程 4

C

乘子 25

初边值问题 6,119,143

初始条件 5

D

达朗贝尔(D'Alembert)解法 11

单层位势 92

单位分解 19

狄利克雷条件,第一边值条件 6

狄利克雷问题 94

狄利克雷原理 112

定解条件 5

定解问题 5

F

发展方程 5

发散积分的有限部分 39

傅里叶定律 3

G

高斯函数 61

格朗沃尔(Gronwall)不等式 147

格林公式 91

广义函数 9,23

广义函数 x_+^λ 与 x_-^λ 36

广义函数 $\frac{1}{x+i0}$ 和 $\frac{1}{x-i0}$ 40

广义函数的卷积 50

广义函数的正则化 48

广义解 13

广义柯西问题 154

H

哈纳克(Harnack)定理 106

哈纳克不等式 107

函数的磨光化 16

函数的卷积 16,46

豪斯道夫—杨(Hausdorff-Young)不等式 74

赫维赛德函数 10,26,27,45

后向光锥 141

缓增广义函数 $\mathscr{S}'$ 65

缓增广义函数的傅里叶变换 66

惠更斯(Huygens)原理 139

混合问题 119

混合型方程 89

J

基本解 81

基本空间 15

集中在曲面 S 上的广义函数 135

极小化序列 113

极值原理 93,120

急减函数的傅里叶变换 60

急减函数空间 $\mathscr{S}$ 60

降维法 138

截断函数 19

解的存在性 7

解的唯一性 7,94,120,148,150

解的稳定性 7,94,148

解析解 77

局部化原理 25

局部可解 81
卷积代数 51

K

开尔文(Kelvin)变换 107
柯西积分主部 37
柯西问题,初值问题 6,116,136
柯西主值 40
柯西—柯瓦列夫斯卡娅定理 77
可去奇点定理 104

L

拉普拉斯方程 1
劳本(Robin)条件或第三边值条件 6
勒维反例 85
黎曼—勒贝格引理 73
刘维尔(Liouville)定理 105

M

磨光核 17
磨光算子 17

N

能量积分 145
拟基本解 109
牛顿位势或体位势 92
诺依曼(Neumam)条件或第二边值条件 6
诺依曼问题 97

O

偶极子 92

P

帕塞瓦尔(Parseval)等式 64
抛物型 88
频谱 59
频谱分析 59
频谱综合 59
平均值公式 93
普兰舍利(Plancherel)定理 76

Q

奇异广义函数 24
奇支集 34
前向光锥 54,141
全象征 87

R

热传导方程 1,3
弱*收敛 30
弱间断 153
弱解 13

S

试验函数 16
适定性 7
双层位势 93
双曲型 88
斯图姆—刘维尔(Sturm-Liouville)问题 123
索伯列夫空间 $H^1(\Omega)$ 113

T

特征方程 152
特征集 88
特征曲面 152
特征线 10
特征线法 11
特里科米(Tricomi)方程 88
体积平均值公式 96
调和函数 90
推迟势 137
推广的莱布尼茨公式 22
椭圆型 88

W

外尔—许瓦兹(Weyl-Schwartz)引理 109
位势型积分 92
物理无穷小 2

X

弦振动方程 1
相空间 10
薛定谔(Schrödinger)方程 1

Y

亚椭圆 108
依赖区域 141
一阶拟线性方程组的柯西问题 77
影响区域 141

有限阶广义函数 44
圆的格林函数 102
跃度公式 28

Z

正则广义函数 24
支集 15
主象征 88
最小作用原理 12